**Mathematical Problems of Electric Power Systems**

# WEEK 3 - ELEMENTS OF GRAPH THEORY. CONNECTION MATRICES AND BASIC MATRICES OF EQUIVALENT CIRCUITS.

**Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi**

**Lecturer**

**(Shohin Jurazoda)**

# ЭЛЕМЕНТҲОИ НАЗАРИЯИ ГРАФҲО. МАТРИТСАҲОИ ВОБАСТАГӢ ВА МАТРИТСАҲОИ АСОСИИ ЗАНҶИРҲОИ ЭЛЕКТРИКӢ

**Мундаричаи лексия:**

1. Назарияи графҳо.
2. Алоқаи байни шохаҳо, контурҳо, зерграфи дарахт ва хорда..
3. Матритсаҳои асосии нақшаи бадалӣ.
4. Адабиёт.

**Назарияи графҳо.** Сохти нақшаи бадалии системаи электрикиро дар намуди *граф* нишон додан мумкин мебошад. Граф гуфта маҷмуи қулла (гиреҳҳо) ва теғаҳоро (шохаҳо) мегуянд, ки ин теғаҳо якчанд ҷуфти қуллаҳоро пайваст менамоянд. Дилхоҳ қисми граф зерграф ном дорад. Зерграфе, ки тамоми қуллаҳои графро пайваст мекунад, вале контури сарбастро ташкил надиҳад, *зерграфи дарахт* меноманд ва қисми боқимондаи графро бошад, *зерграфи хорда* меноманд. Маҷмуи теғаҳо, ки ду қулларо бо ҳам пайваст менамоянд, *зерграфро* ба вуҷуд меоранд, ки ҳамчун *роҳи граф* муайян карда мешавад. Агар қуллаҳои ибтидоӣ ва интиҳоии роҳи граф мувофиқ оянд, он гоҳ ин роҳи граф сарбаста мебошад ва контурро ба вуҷуд меорад [1].

Агар роҳи қуллаҳои ибтидоӣ ва интиҳоии мувофиқ оянд, пас ин роҳи граф сарбаста мебошад ва контурро ба вуҷуд меорад. Агар дар граф роҳро, ки ду қуллаи дилхоҳро бо ҳам мепайвандад интихоб намудан мумкин бошад, онгоҳ ин граф басташуда мебошад. Агар дар граф роҳеро интихоб намудан мумкин бошад, ки он дилхоҳ ду қуллаи онро пайваст намояд, пас ин гуна графро пайвасткунанда меноманд. Дар ҳолати баръакс бошад, граф ро ғайри пайвасткунанда меноманд. Агар теғаҳои граф самтҳои муайян дошта бошанд, он гоҳ ин граф самтдор ном дорад. Ҳар як теғаи графи самтдор қуллаҳои ибтидоӣ ва интиҳоиро доро мебошанд.

**Алоқаи байни шохаҳо, контурҳо, зерграфи дарахт ва хорда.** Алоқаи байни шумораи теғаҳо $n_т$ ва шумораи қуллаҳо $n_к$ вобаста ба формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$n_{тд} = n_к - 1. \qquad (3.1)$$

Шумораи хордаҳоро мувофиқи формулаи зерин муайян кардан мумкин аст:

$$n_{х} = n_{т} - n_{тд}, \qquad (3.2)$$

дар ин ҷо, $n_{т}$ – шумораи теғаҳои граф мебошад.

Шумораи контурҳои новобастаро аз рӯи формулаи зерин муайн кардан мумкин аст:

$$n_{к} = n_{х}, \qquad (3.3)$$

Дар расми 3.1 намунаи шабакаи электрикӣ (расми 3.1а) оварда шудаааст ва инчунин яке аз вариантҳои граф барои ин шабака (расми 3.1б) тасвир карда шудааст, ки он дорои $n_{ш} = 6$, $n_{т} = 9$, $n_{тд}= 5$, $n_{х} = 4$, $n_{к} = 4$. Дар ин ҷо гиреҳи 3 гиреҳи заминвасла мебошад.

Барои намунаи дар расми 3.1б оварда шуда, тартиби муайян намудани контурҳои вобаста ва новобастаро дида мебароем. Контурҳои интихобшуда новобаста мебошанд, зеро барои дар онҳо ягон шохае дида намешавад, ки ба дигар контурҳо дохил шавад. Муодилаҳо мустақил мебошанд, агар ягонтои онҳо аз дигар муодилаҳо ҳосил карда нашавад.

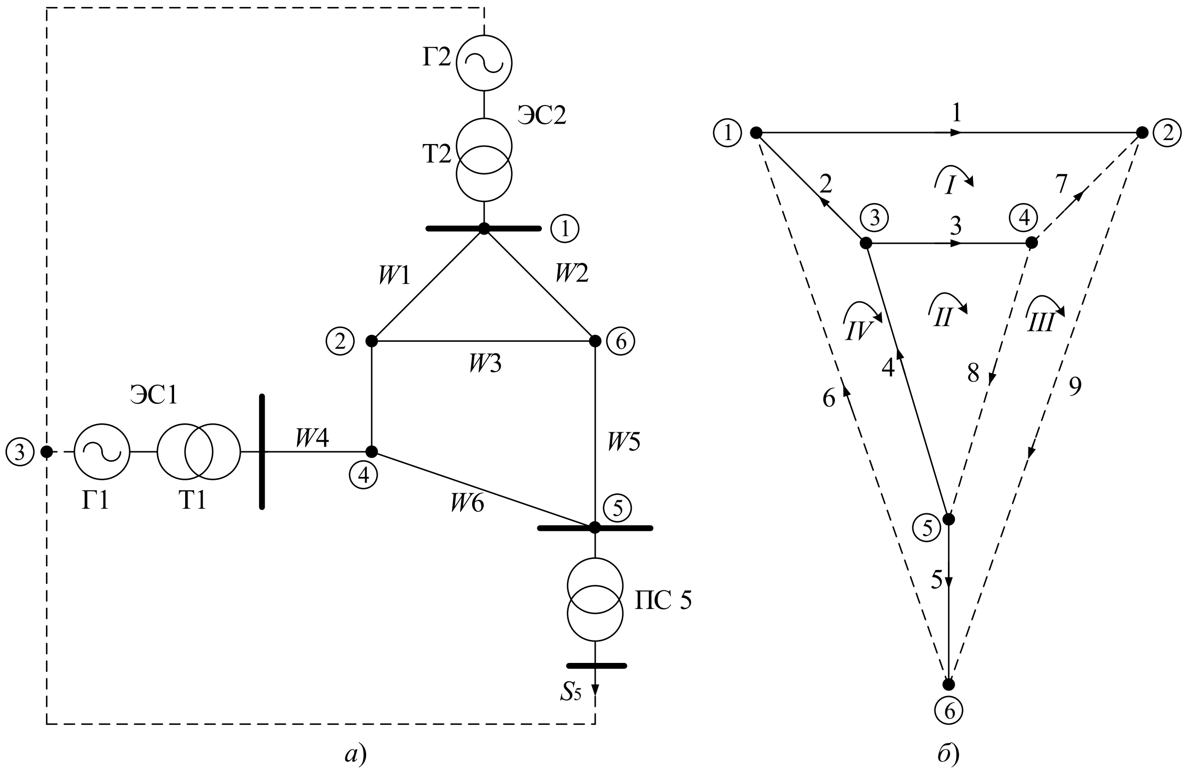
Бо ҷудо кардани хордаи дарахт, хордаҳоро аз граф хориҷ мекунем ва ба таври пайдарпай контурҳои мустақили содаро (ки соҳаҳои дохилии онҳо бо ягон шоха бурида намешаванд) бо чунин тарз мебандем:

1. Контури I бо ҳамроҳ кардани хордаи 7 ҳосил мешавад ва тавассути теғаҳои 1, 2, 3 ва 7 сарбаста мешавад;

2. Контури II бо ҳамроҳ кардани хордаи 8 ҳосил мешавад ва тавассути теғаҳои 3, 4 ва 8 сарбаста мешавад;

3. Контури III бо ҳамроҳ кардани хордаи 9 ҳосил мешавад ва тавассути теғаҳои 5, 7, 8 ва 9 сарбаста мешавад;

4. Контури IV бо ҳамроҳ кардани хордаи 6 ҳосил мешавад




Расми 3.1. Намунаи системаи электроэнергетикӣ (*а*) ва графи он (*б*)

Ҳангоми истифодаи ин алгоритм ҳамаи контурҳо мустақил мешаванд, зеро ба ҳар як контури нав хордаи нав дохил мешавад.

Нақшаи ивазкунии системаи электрикӣ одатан графи алоқаманд (пайваст) мебошад. Ҳамаи бузургиҳое, ки ҳолати шохаҳоро тавсиф мекунанд (ҷараёнҳо, КЭҲ, афтиши шиддат), самти муайян доранд (ки бидуни он низоми нақшаро ҳисоб кардан мумкин нест). Бинобар ин, мақсаднок аст, ки ба ҳар як шохаи схема самти муайяни (ихтиёрӣ интихобшуда) дода шавад. Ҳамин тариқ, схемаи ивазкунии система одатан графи алоқаманди самтдор мебошад, ки шохаҳо ҳамчун деворҳо (реброҳо) ва гиреҳҳо ҳамчун қуллаҳои он хизмат мекунанд [2].

Дар расми 3.3 нақша дар намуди графи сарбасташудаи самтдор барои системаи электроэнергетикии расми 1.1 оварда шудааст, ки дар он самти шохаҳо интихоб карда шудаанд, инчунин рақами шохаҳо ва гиреҳҳо нишон дода шудаанд. Дар расми 3.2 қисми ин нақша – зерграф (зернақша) тасвир ёфта шудааст, ки ғайрисарбаста мебошад, масалан, роҳи граф, ки қуллаҳои *a* ва *b* – ро пайваст менамояд, вуҷуд надорад.

Ҳангоми дар намуди граф тасвир ёфтани нақша ба ишораҳои махсуси муқовимат ва ҚЭҲ эҳтиёҷ нест. Шохаҳо графики бо нишондодани самтҳои онҳо тасвир меёбанд (расми 3.1). Ҳамин тариқ, самти шоха аз гиреҳи ибтидоӣ ба интиҳоӣ дар як вақт барои ҳамаи бузургиҳои дар нақша иштироккунанда мусбат мебошад – ҚЭҲ $E$, ҷараён $I$ ва афтиши шиддат $U_{Ш}$. Дилхоҳ аз ин бузургиҳо мусбат ё манфӣ вобаста ба самти интихобнамуда метавонанд шаванд.

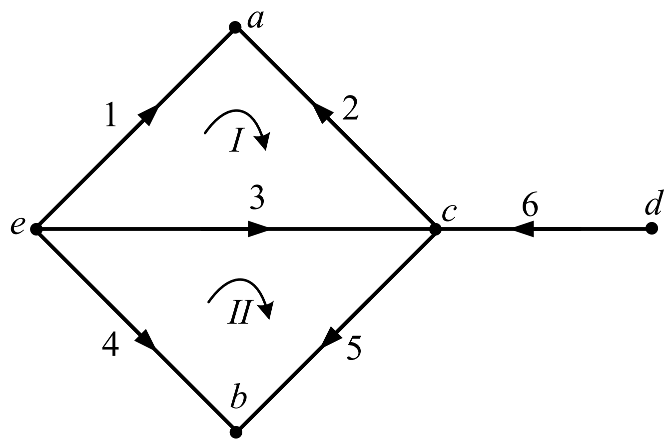
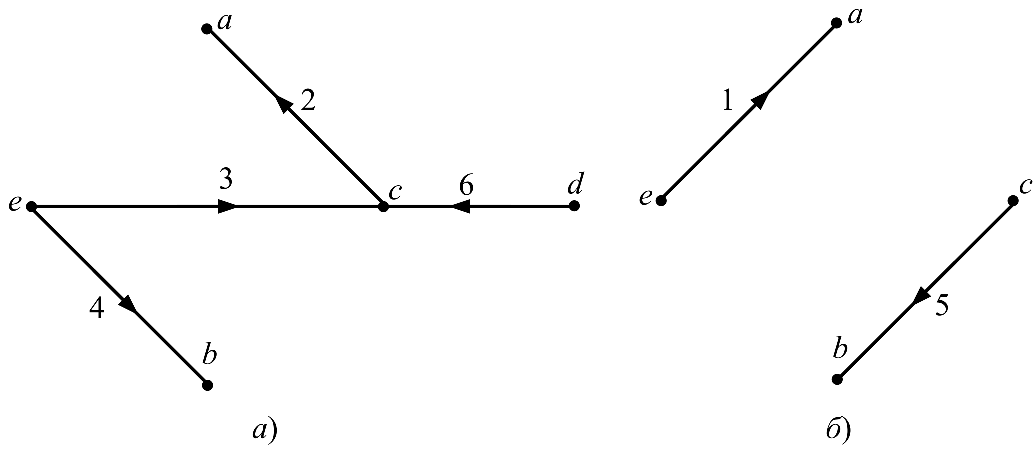



Рисунок 3.2. Схема в виде связанного направленного графа




Расми 3.3. Қисми нақшаи расми 1.1 ба намуди зерграфи дарахт (*а*) ва зерграфи хорда (*б*)

Нақшаи бадалии СЭЭ одатан графи басташуда мебошад. Он аз шохаҳои дар гиреҳҳо пайвастшуда иборат мебошад. Шохаҳо занҷирро (роҳи граф) ташкил медиҳанд, ки онҳо метавонанд, сарбаста бошанд. Ҳамаи бузургиҳо (ҷараёнҳо, ҚЭҲ, афтиши шиддат), ки ҳолати шохаҳоро тавсиф менамоянд дорои самти муайян мебошанд. Ҳамин тариқ, нақшаи бадалии система одатан графи сарбасташудаи самтдор мебошад.

**Матритсаҳои асосии нақшаи бадалӣ.** Барои тартиб додани матритсаҳое, ки дар бораи схемаи ивазкунии системаҳои энергетикӣ (СЭЭ) маълумоти пурра медиҳанд, дониши ҳисоби матритсавӣ зарур аст. Қоидаҳои ҷамъ ва зарбкунии матритсаҳо дар [1, 3, 4] оварда шудаанд. Фарз мекунем, ки матритсаҳои A ва B дода шудаанд; ҷамъ ва зарби ин матритсаҳоро муайян мекунем:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix};$$

$$C=A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix};$$

$$D=A\times B=\left[\begin{matrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n1} & a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{n1} & \dots \\ a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{2n} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{2n} & \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{11}\cdot b_{1n}+a_{12}\cdot b_{2n}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{nn} & a_{21}\cdot b_{1n}+a_{22}\cdot b_{2n}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{nn} & \dots \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \dots & a_{n1}\cdot b_{11}+a_{n2}\cdot b_{21}+\ldots+a_{nn}\cdot b_{n1} \\ \dots & a_{n1}\cdot b_{12}+a_{n2}\cdot b_{22}+\ldots+a_{nn}\cdot b_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots & a_{n1}\cdot b_{1n}+a_{n2}\cdot b_{2n}+\ldots+a_{nn}\cdot b_{nn} \end{matrix}\right]=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Матритсаҳои ҷамъшаванда бояд андозаҳои якхела дошта бошанд (шумораи сутунҳо ва сатрҳояшон баробар бошанд). Барои он ки зарби *A*х*B*-ро ҳисоб кардан мумкин бошад, шумораи сутунҳои матритсаи *A* бояд ба шумораи сатрҳои матритсаи *B* баробар бошад. Элементҳои матритсаи *D* бо формулаи зерин муайян карда мешаванд:

$$d_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}. \tag{3.5}$$

Шумоари сатрҳои матритаи $D$ ба шумораи сатрҳои матритсаи $A$ ва шумораи сутунҳоя ба шумораи сутунҳоои матритсаи $B$ баробар мебошанд.

Матритсаи транспонированидашуда [2]:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (3.6)$$

Матритсаи чаппа:

$$A^{-1} = \frac{A^{V}}{\Delta_A}. \qquad (4.4)$$

Матритсаи ҳамбаста (танҳо барои матритсаи мураббаъ муайян карда мешавад):

$A^{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ – бо роҳи иваз кардани элементҳои матритсаи А ба иловагиҳои алгебравии онҳо ва сипас транспонированидан (чаппагардон) ҳосил мешавад.

Маълумоти муфассал оид ба масъалаҳои марбут ба истифодаи ҳисоби матритсавӣ барои таҳлил ва ҳалли системаи муодилаҳо дар [2] оварда шудааст.

Дар усулҳои матритсавии ҳисоби низомҳои муқарраршудаи кори СЭЭ (усули потенсиалҳои гиреҳӣ ва усули ҷараёнҳои контурӣ) матритсаҳои мураббаи гузаронандагии гиреҳҳо $Y$ ва муқовиматҳои контурии $Z_{\text{к}}$ истифода мешаванд. Барои шабакаҳои оддӣ матритсаҳои $Y$ ва $Z_{\text{к}}$ метавонанд бевосита аз рӯи схема ташаккул дода шаванд. Аммо барои шабакаҳои мураккаб, ки дорои даҳҳо ва зиёда аз он гиреҳҳо ва шохаҳо мебошанд, ин матритсаҳо дар компютер аз матритсаҳои содатар – матритсаҳои муқовимати шохаҳо, матритсаҳои гузаронандагии шохаҳо ва матритсаҳои гузаронандагии гиреҳҳо сохта мешаванд.

Ҳамин тариқ, ҳангоми ҳисобкунии низомҳои симметрии шабакаҳои электрикӣ матритсаҳои асосии схемаҳои ивазкунии зерин истифода мешаванд [2]:

1. Матритсаи диагоналии муқовиматҳои шохаҳо:

$$Z_{\text{Ш}} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_m \end{bmatrix}. \qquad (3.7)$$

Дар ин ҷо, $m$ – шумораи шохаи нақша мебошад.

2. Матритсаи диагналии ноқилиятҳои шохаҳо [5]:

$$Y = Z_{\text{Ш}}^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/z_m \end{bmatrix}. \qquad (3.8)$$

3. Матритсаи ноқилиятҳои гиреҳӣ:

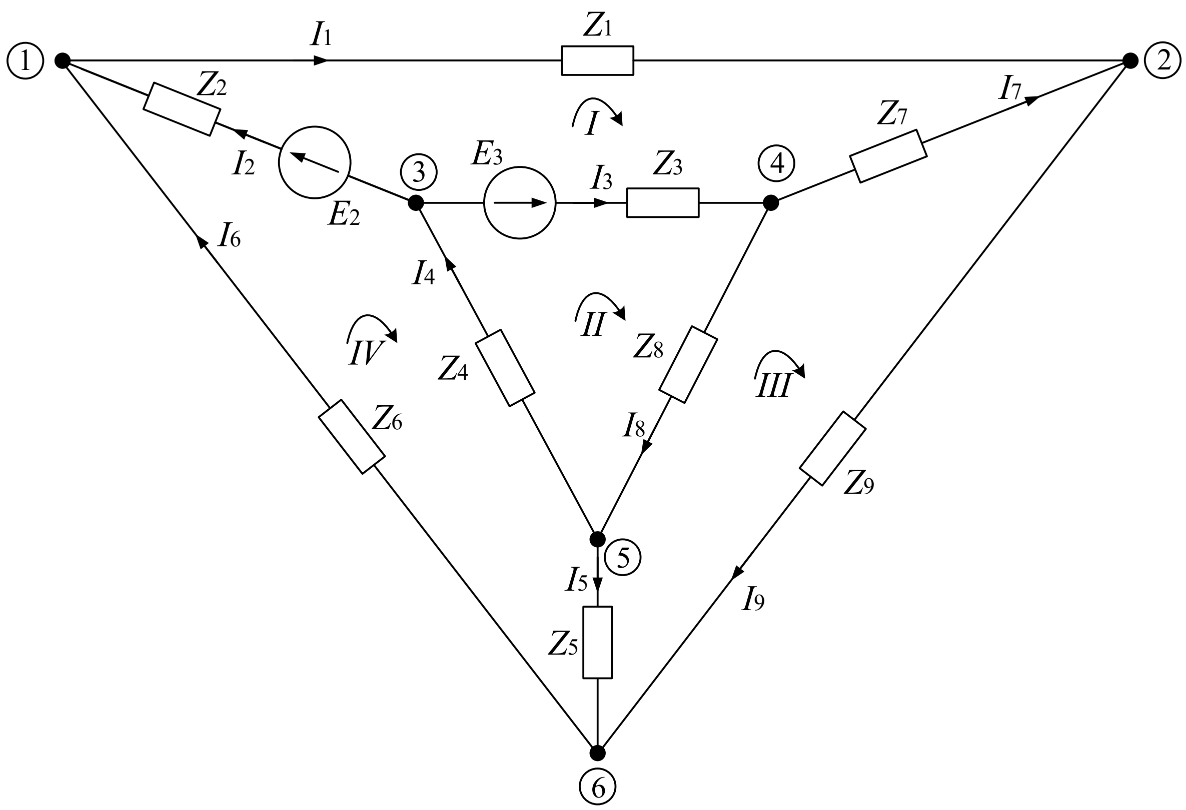
$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (3.9)$$

дар ин ҷо, сатри $i$-ум ба гиреҳи $i$-ум ва сутуни $j$-ум ба гиреҳи $j$ - ум мувофиқат мекунад, ва шумораи сатрҳо ва сутунҳо ба шумораи гиреҳҳои схема ($n$) баробар аст.Дар диагонали асосӣ *ноқилиятҳои хусусии гиреҳӣ* ҷойгир мешаванд, ки барои онҳо $i = j$ аст ва ҳар кадоми онҳо ба ҷамъи гузаронандагиҳои шохаҳои бо ин гиреҳ пайвастшуда баробар мебошанд.Элементҳои боқимонда (барои онҳое, ки $i \neq j$ аст) *ноқилиятҳои байниҳамдигарии гиреҳӣ* мебошанд ва ҳар кадоми онҳо ба гузаронандагии шохаи байни гиреҳҳои $i$ ва $j$ баробар аст (бо аломати манфӣ гирифта мешавад):

4. Матритсаи муқовиматҳои контурӣ:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{21} & \cdots & z_{n1} \\ z_{12} & z_{22} & \cdots & z_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{1n} & z_{2n} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (3.10)$$

дар ин ҷо, сатри $i$-ум ба контури $i$-ум, сутуни $j$-ум ба контури $j$ -ум мувофиқат мекунад ва шумораи сатрҳо ва сутунҳо ба шумораи контурҳои новобастаи нақша ($k$) баробар аст. Дар диагонали асосӣ муқовиматҳои хусусии контурӣ ҷойгиранд, ки дар онҳо ҳар як $i$ ва $j$ ба ҷамъи муқовиматҳои шохаҳои ба ҳамон контур дохилшаванда баробар аст. Элементҳои боқимонда, ки барои онҳо $i \neq j$ аст, муқовиматҳои байниҳамдигарии контурӣ мебошанд ва ҳар кадоми онҳо ба ҷамъи муқовиматҳои шохаҳое баробар аст, ки ҳам ба контури $i$ - ум ва ҳам ба контури $j$ -ум дохил мешаванд. Муқовимати байниҳамдигарӣ бо аломати «+» гирифта мешавад, агар самтҳои даврзании контурҳои $i$ ва $j$ тавассути шохаи умумии онҳо мувофиқат кунанд.




Расми 3.4. Намунаи нақшаи бадалии СЭЭ дорои манбаи ҚЭҲ буда

5. Матритсаи муқовиматҳои гиреҳӣ:

$$Z = Y^{-1}. \qquad (3.11)$$

Ин матритсаи сирф ҳисобӣ мебошад ва он ягон маънои физикӣ надорад ва онро бевосита аз рӯи схема ҳосил кардан мумкин нест.

## Адабиёт


1. Веников В.А. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для студентов вузов / В.А. Веников, Э.Н. Зуев, И.В. Литкенс и др., под ред. В.А. Веникова – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981. – 288 с.

2. Филяев К.Ю. Математические задачи энергетики: Учебно-методический комплекс / К.Ю. Филяев – Челябинск: 2005. – 212 с.

3. Электрические системы и сети: учебник для вузов / В.И. Идельчик. – М.: Издательской группы URSS, 2022. – 600 с.

4. Электрические системы и сети в примерах и иллюстрациях: учебное пособие для элекроэнерг. спец. / В.В. Ежков, Г.К. Зарудский, Э.Н. Зуев и др.; Под ред. В.А. Строева. – М.: Высшая школа, 1999. – 352 с.

5. Ҷӯраев Ш.Ҷ., Исмоилов С.Т. Электротехника (қисми 2). Занҷирҳои электрикии якфаза ва сефазаи ҷараёни синусоидалӣ. Воситаи таълимӣ – Душанбе: ДТТ ба номи академик М.С. Осимӣ, 2020 – 170 саҳ.