Mathematical Problems of Electric Power Systems

WEEK 4 - FORMULATION OF MATRIX STATE EQUATIONS FOR ELECTRICAL CIRCUITS.

Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi

Lecturer

(Shohin Jurazoda)

ТАРТИБ ДОДАНИ МУОДИЛАҲОИ ҲОЛАТИ ЗАНҶИРҲОИ ЭЛЕКТРИКӢ БА НАМУДИ МАТРИТСАВӢ

Мундариҷаи лексия:

1. Тартиб додани матритсаҳои вобастагӣ.
2. Навишти матритсавии қонунҳои асосии занҷирҳои электрикӣ.
3. Тартиб додани муодилаи ҳолати занҷири электрикӣ.
4. Адабиёт.

Тартиб додани матритсаҳои вобастагӣ. Барои дихоҳ графи самтдор матритсаҳои вобастагии шохаҳо дар гиреҳҳо ва контурҳои новобастаро муайян кардан мумкин аст. Ин матритсаҳоро дар бисёр адабиётҳо матритсаҳои якум ва дуюми воқеа меноманд [1, 2]:

1. Матритсаи вобастагии шохаҳо дар гиреҳҳо (матритсаи якуми воқеа);
2. Матритсаи вобастагии шохаҳо дар контурҳои новобаста (матритсаи дуюми воқеа), ки барои тасаввури таҳлили ҷамъбастии граф.

Матритсаи вобастагии шохаҳо дар гиреҳҳо – ин матритсаи росткунҷа мебошад, ки шумораи сатрҳои он ба шумораи қуллаҳои граф n, ва шумораи сутунҳо ба шумораи теғаҳо m баробар мебошанд. Ин матритса чунин ишора карда мешавад:

$$M_{\Sigma} = \left(m_{ij}\right), \; i = 1; 2; \ldots n \text{ ва } j = 1; 2; \ldots m \qquad (4.1)$$

дар ин ҷо, $M_{\Sigma} = \left(m_{ij}\right)$ – элементи матритсаи M_{Σ} буда, i – рақами сатр ва j – рақами сутуни ин матритсаро нишон медиҳад, яъне

Дар ин ҳол рақами сатрҳо i ба рақами қуллаҳо ва рақами сутунҳо j – ба рақами теғаҳо мувофиқ мебошанд. Элементҳои матритсаи M_{Σ} яке аз ин се қимматҳоро доро буда метавонанд [1, 2]:

$m_{ij} = +1$, - агар гиреҳи i ибтидои қуллаи шохаи j бошад;

$m_{ij} = -1$, - агар гиреҳи i интиҳои қуллаи шохаи j бошад;

$m_{ij} = 0$, - агар гиреҳи i қуллаи шохаи j набошад;

Дар расми 3.1 нақша дар намуди графи сарбастаи самтдор барои

Барои графи дар расми 3.2 овардашуда бо назардошти муодилаи (4.1) матритсаи M_Σ – ро тартиб медиҳем:

$$M_\Sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$

Ҳар як сатри матритсаи M_Σ нишон медиҳанд, ки ба кадом қуллаҳо шохаҳои дахлдор ба гиреҳи нақшаи додашуда пайваст мебошанд. Ҳар як сутун нишон медиҳад, ки кадоме аз гиреҳҳо ибтидо ва интиҳои қуллаҳои шохаҳои додашуда мебошанд. Маълум аст, ки дар ҳар як сутуни матритсаи M_Σ танҳо як воҳиди мусбат ва як воҳиди манфӣ буда метавонад, элементҳои боқимонда сифр мебошанд. Ҳамин тариқ, суммаи ҳамаи сатрҳои ин матритса (бо сутунҳо) бояд матритсаи нулиро (сатрӣ) диҳад:

$$n_t \cdot M_\Sigma = 0, \tag{4.2}$$

дар инҷо n_t – сатри яккӣ (воҳидӣ).

Агар сатрро, ки ба ягон гиреҳи ҳамчун гиреҳи балансӣ қабулнамуда мувофиқ мебошад, ҷудо намоем. Он гоҳ, ин шарт бо тарзи зерин навишта мешавад:

$$[n_t 1] \cdot \begin{bmatrix} \text{М} \\ \text{М}_\text{б} \end{bmatrix} = 0, \tag{4.3}$$

аз ин ҷо

$$\text{М}_\text{б} = -n_t \text{М}. \tag{4.4}$$

дар ин ҷо, M – матритсаи пайвастшавӣ барои нақшаи бе назардошти гиреҳи балансӣ; $M_\text{б}$ – матритсаи пайвастшавӣ барои гиреҳи балансӣ; n_t – матритсаи воҳидии сатрӣ.

Натиҷаи бадастомада инро мефаҳмонад, ки яке аз сатрҳои матритсаи M_Σ бо ҷамъ кардани сатрҳои дигар (бо сутунҳо) ва бо тағйирдодани аломатҳои ҳамаи элементҳои матритсаи суммавӣ ба баръакс (яъне, бо зарб намудани он ба воҳиди нисбӣ) ҳосил шуда метавонад. Барои ҳамин ҳам дар ҳисобҳои амалӣ матритсаи M – ро истифода бурдан кофӣ мебошад, ки бо он тамоми нақшаро барқарор намудан мумкин аст. Нақшаи ҳосилшуда аз нақшаи ибтидоӣ танҳо бо намуди берунааш фарқ менамояд, яъне бо ҷойгиршавии гиреҳҳо ва бо сохти контурҳо. Дар ҳолати зарурӣ матритсаи M_Σ бо ифодаи зерин муайян карда мешавад:

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} M \\ -n_t M \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Матритсаи вобастагии шохаҳо дар контурҳои новобаста – ин матритсаи росткунҷа мебошад, ки шумораи сатрҳои он ба шумораи контурҳои новобастаи графи k ва шумораи сутунҳояш ба шумораи шохаҳои m граф баробар мебошанд. Ин матритса чунин ишора карда мешавад:

$$N=(n_{ij}),\ i=1,\dots,k;\ j=1,\dots,m. \tag{4.6}$$

Дар ин ҳолат рақамҳои сатрҳои i мувофиқ ба рақамҳои контурҳои новобаста мебошанд ва рақамҳои сутунҳои j ба рақамҳои шохаҳо мувофиқанд.

Элементҳои матритсаи N бо чунин тарз муайян карда мешаванд [1, 2]:

n_{ij} = + 1, агар шоха j дар контур i дохил бошад ва онҳо ҳамсамт бошанд;

n_{ij} = – 1, агар шоха j дар контур i дохил бошад ва онҳо ҳамсамт набошанд;

n_{ij} = 0, агар шоха j дар контур i дохил набошад.

Барои графи дар расми 3.2 овардашуда бо назардошти муодилаи (4.6) матритсаи N – ро тартиб медиҳем:

$$N = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} I \\ II \end{array} \end{array}$$

Навишти матритсавии қонунҳои асосии занҷирҳои электрикӣ. Матритсаҳои M ва N имкони навиштани муодилаи ҳолати занҷири электрикиро дар намуди матритсавӣ медиҳанд. Системаи муодилаҳои қонуни якуми Кирхгофро дар намуди зерин навиштан мумкин аст [1, 3]:

$$M \cdot \dot{I} = \dot{J}, \tag{4.7}$$

дар инҷо $\dot{I} = (\dot{I}_i),\ i = 1, \dots, m; \dot{J} = (\dot{J}_i),\ i = 1, \dots, n-1$ – сутунҳои ҷараёнҳо дар шохаҳо ва ҷараёнҳои додашуда дар гиреҳҳо.

Дар ҳақиқат, аз ҷараёнҳои ҳамаи шохаҳои дар намуди сутуни $\dot{I}$ навишташуда, ҳангоми зарб ба ҳар як сатри матритсаи M танҳо ҳамон ҷараёнҳои шохаҳо алгебравӣ ҷамъ карда мешаванд, ки ба гиреҳҳои мувофиқ пайваст шудаанд. Аломати ҳар яки ин ҷараёнҳо вобаста ба самти шохаҳо муайян карда мешаванд: аломати ҷараён мусбат қабул карда мешавад, агар қулла (гиреҳ) ибтидои теға (шоха) бошад. Дар ҳолати баръакс бошад, аломати ҷараён манфӣ қабул карда мешавад. Ҳамин тариқ, системаи муодилаҳои қонуни дуюми Кирхгофро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$N \cdot \dot{U}_{\text{Ш}} = 0, \tag{4.8}$$

дар инҷо $\dot{U}_{\text{Ш}} = \left(\dot{U}_{\text{Ш}i}\right)$, $i = 1, \dots, m$ – сутуни афтиши шиддат дар шохаҳои нақша.

Аз қонуни Ом истифода бурда, ҷараёнҳоро дар шохаҳои нақшаи бадалӣ дар қонунин дуюми Кирхгоф нишон медиҳем. Барои шабакаи шаклаш озоди дорои m шохабуда, ки байни онҳо алоқаи тарафайни индуктивӣ вуҷуд надорад, ин қонун бо муодилаи матритсавӣ ифода меёбад:

$$\dot{U}_{\text{Ш}} = Z_{\text{Ш}} \cdot \dot{I} - \dot{E}, \tag{4.9}$$

дар инҷо $Z_{\text{Ш}} = diag(Z_i)$, $i = 1, \dots, m$ – матритсаи диагоналии муқовиматҳои шохаҳо; $\dot{E} = \left(\dot{E}_i\right), i = 1, \dots, m$ – сутуни ҚЭҲ дар шохаҳо.

Ифодаи (4.9)-ро дар (4.8) гузошта, муодилаи матритсавии қонуни дуюми Кирхгофро ҳосил менамоем:

$$N\left(Z_{\text{Ш}} \cdot \dot{I} - \dot{E}\right) = 0, \tag{4.10}$$

ё ин ки

$$N Z_{\text{Ш}} \dot{I} = \dot{E}_{\text{К}},$$

дар ин ҷо $\dot{E}_{\text{К}} = N \cdot \dot{E}$ – сутуни ҚЭҲ-ҳои контур.

Тартиб додани муодилаи ҳолати занҷири электрикӣ. Муодилаҳои матритсавии (4.7) ва (4.10) – ро дар системаи умумӣ якҷоя намуда, муодилаи ҷамъбастии ҳолати занҷири электрикиро ба даст меорем, ки намуди он аз шаклаш ва шумораи элементҳо вобаста намебошад:

$$\left.\begin{aligned} M \cdot \dot{I} &= \dot{J}; \\ N \cdot Z_{\text{Ш}} \cdot \dot{I} &= \dot{E}_{\text{К}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

Агар матритсаҳои M ва $N{\cdot}Z_{\text{Ш}}$ – ро ҳамчун як блоки якҷоя тасаввур намоем, пас матритсаи қисми чапи системаи муодилаҳои (4.11) – ро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$A = \begin{bmatrix} M \\ N \cdot Z_{\text{Ш}} \end{bmatrix},$$

ва матритсаҳои $\dot{J}$ ва $\dot{E}_{\text{К}}$ – ро ҳамчун блоки якҷояшудаи як матритсаи параметрҳои додашудаи реҷа қабул кардан мумкин аст:

$$\dot{F} = \begin{bmatrix} \dot{J} \\ \dot{E}_{\text{К}} \end{bmatrix}.$$

Дар ин ҳолат *муодилаи ҷамъбастии ҳолат* намуди зеринро мегирад

$$A\dot{I} = \dot{F}. \qquad (4.12)$$

Дар инҷо матритсаи A матритсаи росткунҷавӣ мебошад.

Бо шиддатҳои $\dot{U}_{\Sigma}$= $(\dot{U}_i)$, $i = 1, \dots, n$ бо ёрии матритсаи M_{Σ} афтиши шиддатро дар шохаҳои нақша муайян намудан мумкин аст. Дар ҳақиқат, ҳар як сутуни матритсаи M_{Σ} дорои яки мусбат дар ҷойи ибтидои қулла ва дорои яки манфӣ дар ҷойи интиҳоии қулла мебошад. Аз ин рӯ, матритсаи $M_{\Sigma t}$ (дар матритсаи M_{Σ} сатрҳоро бо сутунҳо иваз намудан) – ро ба сутуни шиддати гиреҳҳо зарб намуда, афтиши шиддатро дар шохаҳо муайян менамоем:

$$\dot{U}_{\text{Ш}} = M_{\Sigma t} \cdot \dot{U}_{\Sigma}. \qquad (4.13)$$

Дар ин ҷо, матритсаи шиддатҳои гиреҳи $\dot{U}_{\Sigma}$ барои ҳамаи гиреҳҳои нақша навишта шудааст (инчунин гиреҳи balансӣ). Бо вуҷуди ин, шиддатҳои гиреҳҳоро нисбат ба дилхоҳ гиреҳ, инчунин гиреҳҳое, ки дар таркиби нақшаи бадалии система ворид нестанд (масалан, нисбат ба нейтрали шабака, ки бо он гиреҳҳои нақша метавонанд дар намуди шохавӣ алоқа надошта бошанд), муайян намудан мумкин аст.

Одатан шиддатҳои гиреҳҳиро нисбат ба гиреҳи балансӣ муайян намудан мақсаднок мебошад, яъне ҳамчун афтиши шиддат аз ҳар як гиреҳи новобастаи нақша то балансӣ. Ин қимматҳо аз шиддат насбат ба нейтрал ба ҳамон як бузургӣ – шиддати гиреҳи балансӣ $U_б$ фарқ менамоянд:

$$\dot{U}_{\Sigma} - U_{б}n = \begin{bmatrix} \dot{U}_{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix},$$

дар инҷо n – сутуни ягона (дар ин ҳолат гиреҳи балансӣ аз рӯи рақам охирин мебошад, яъне $U_{б} = U_{n}$); $\dot{U}_{\Delta}= (U_{i} - U_{n})$, $i = 1, \dots ,\ n – 1$ – шиддати гиреҳҳоро нисбат ба балансӣ муайян менамояд.

Дар ин ҳолат матритсаи афтиши шиддат дар шохаҳоро ба намуди ерин муайян намудан мумкин аст:

$$\dot{U}_{Ш} = M_{\Sigma t} \begin{bmatrix} \dot{U}_{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} = [M_{t} M_{бt}] \times \begin{bmatrix} \dot{U}_{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} = M_{t}\dot{U}_{\Delta}. \quad (4.14)$$

Мувофиқи навишти қонуни дуюми Кирхгоф ба намуди матритсавӣ (4.8) ва муодилаи афтиши шиддатҳо дар шохаҳо (4.14) муайян намудан мумкин аст, ки:

$$N \cdot M_{t} \cdot \dot{U}_{\Delta} = 0.$$

Аз сабаби он ки ин шарт ҳангоми дилхоҳ матритсаи $\dot{U}_{\Delta}$, дуруст аст, пас,

$$N \cdot M_{t} = 0 \quad (4.15)$$

Муодилаи (4.15) хусусияти умумии топологии графро нишон медиҳад ва ба намуди зерин шарҳ додан мумкин аст. Ҳангоми гардиши дилхоҳ контури сарбаст гузариш аз гиреҳ доимо бо ҳаракат тавассути яке аз шохаҳо ба самти гиреҳ ва тавассути шохаи дигар – аз гиреҳ вобаста аст. Бо назардошти ин, ҳангоми тартиб додани матритсаи M самтҳои шохаҳо нисбат ба самти гиреҳ нигаронида мешаванд. Ҳангоми зарб задани матритсаи N ба матритсаи трансронидашудаи M_t аз тарафи рост, зарбкунии ҷуфт-ҷуфти элементҳои ғайрисифрии матритсаҳои N ва M барои шохаҳои якхела бо самтҳои гуногуни онҳо, сурат мегирад. Дар ин ҳолат, ҳангоми гузаштан аз ҳар як гиреҳ, ҳосили зарб ба воҳиди мусбат (+ 1) ва дуюмаш ба воҳиди манфӣ (– 1) баробар мешавад ва дар натиҷа, ҷамъи онҳо ҳамеша ба сифр (0) баробар мешаванд.

Шарти (4.15) имкон намедиҳад, ки матритсаи N – ро ҳангоми муайян будани матритсаи M муайян намоем. Ин аз он вобаста аст, ки дар як занҷири электрикӣ, дар аҳолати умумӣ якчанд системаҳои контурҳои новобаста вуҷуд дошта метавонад ва ё бо ибораи дигар, як матритсаи M – ро метавон вобаста ба якчанд матритсаи N муайян намуд. Ҳамин тавр, барои нақшаи дар расми 4.1 овардашуда се вариантҳои имконпазири системаҳои контурҳои новобаста вуҷуд дорад:

а) 1 – 2 – 5 ва 4 – 5 – 6;

б) 1 – 2 – 5 ва 1 – 2 – 6 – 4;

в) 1 – 2 – 6 – 4 ва 4 – 5 – 6.

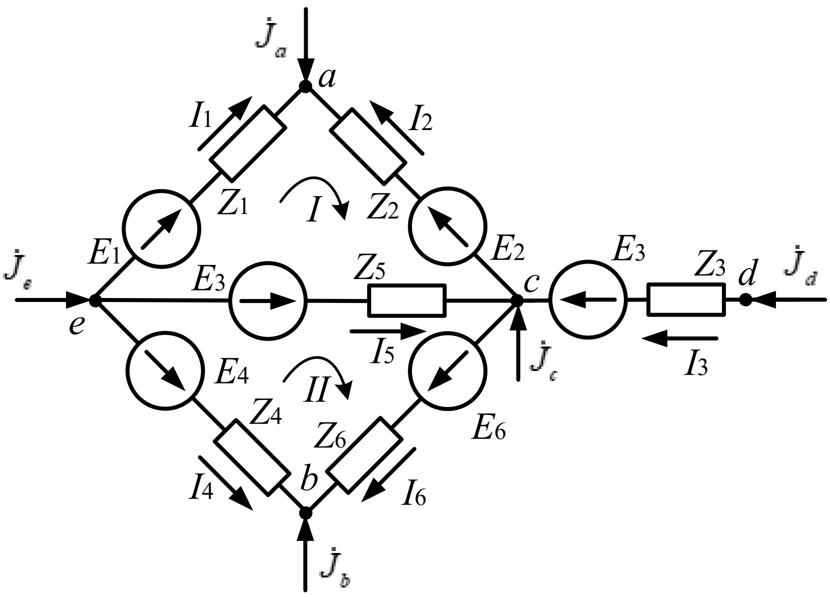

Рисунок 4.1. Занҷири электрикӣ

Адабиёт

1. Веников В.А. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для студентов вузов / В.А. Веников, Э.Н. Зуев, И.В. Литкенс и др., под ред. В.А. Веникова – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981. – 288 с.

2. Филяев К.Ю. Математические задачи энергетики: Учебно-методический комплекс / К.Ю. Филяев – Челябинск: 2005. – 212 с.

3. Ҷӯраев Ш.Ҷ., Исмоилов С.Т. Электротехника (қисми 2). Занҷирҳои электрикии якфаза ва сефазаи ҷараёни синусоидалӣ. Воситаи таълимӣ – Душанбе: ДТТ ба номи академик М.С. Осимӣ, 2020 – 170 саҳ.