Mathematical Problems of Electric Power Systems

WEEK 10 - Gauss-Seidel method.
Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi

Lecturer
(Shohin Jurazoda)

УСУЛИ ГАУСС – ЗАЙДЕЛ

Мундариҷаи лексия:

1. Усули Гаусс – Зейдел.
2. Ҳалли мисол.
3. Адабиёт.

Усули Гаусс – Зейдел. Ин усул чун усули итератсияи оддӣ ба истифодабарии муодилаҳои ба намуди зерин асоснок карда мешавад [1].

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - \ldots - a_{1n} \cdot x_n\right);\\
&x_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \ldots - a_{2n} \cdot x_n\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = \frac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_n - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \ldots - a_{n(n-1)} \cdot x_{n-1}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

Аммо нисбат ба усули итератсияи оддӣ барои ҳисоббарории i – юм тағйирёбанда дар ҳар як қадами k – юми раванди итератсионӣ қимматҳои тағйирёбандаҳое, ки чун дар қадами пешина ҳисоббарорӣ шудаанд, дар ин қадам низ истифода мешаванд. Бо вуҷуди ин дар k – юм қадами раванди итератсионӣ системаи (10.1) намуди зерин дорад:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n^{(k-1)}\right);\\
&x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(k)} - a_{23} \cdot x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n} \cdot x_n^{(k-1)}\right);\\
&x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}} \cdot \left(b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(k)} - a_{32} \cdot x_2^{(k)} - a_{34} \cdot x4_2^{(k-1)} - \ldots - a_{3n} \cdot x_n^{(k-1)}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{n-1}^{(k)} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}} \cdot \left(b_{n-1} - a_{(n-1)1} \cdot x_1^{(k)} - \ldots - a_{(n-1)(n-2)} \cdot x_{n-2}^{(k)} - a_{(n-1)n} \cdot x_n^{(k-1)}\right);\\
&x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_n - a_{n1} \cdot x_1^{(k)} - a_{n2} \cdot x_2^{(k)} - \ldots - a_{n(n-1)} \cdot x_{n-1}^{(k)}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

Барои маълум намудани шарте, ки ҷуроии раванди итератсиониро аз рӯйи усули Гаусс – Зейдел муайян менамоянд, чун дар пеш системаи муодилаҳои намуди (10.1) – ро дар намуди матритсавӣ менависем [2]:

$$x = B + C\cdot x, \tag{10.3}$$

дар ин ҷо, B – матритсаи сутунӣ; C – матритсаи квадратӣ бо элементҳои диоганалии нулӣ мебошанд.

Матритсаи C – ро дар намуди суммаи матритсаҳои секунҷавии болоӣ ($C_б$) ва поёнӣ ($C_п$) қабул намуда, ҳосил менамоем

$$x = B + C_б\cdot x + C_п\cdot x. \tag{10.4}$$

Вобаста ба ин раванди итератсионии (10.2) – ро дар намуди матритсавӣ менависем:

$$x^{(k)} = B + C_б\cdot x^{(k-1)} + C_п\cdot x^{(k)} \tag{10.5}$$

ва ё

$$x^{(k)} = B' + C'\cdot x^{(k-1)}, \tag{10.6}$$

дар ин ҷо, $B' = (1 - C_п)^{-1}B$; $C' = (1 - C_п)^{-1}\cdot C_б$.

Ифодаи (10.5) ба ифодаи (10.2), ки барои усули итератсияи оддӣ ҳосил шудааст, монанд мебошанд. Ҳамин тариқ, барои мувофиқ омадани раванди итератсионӣ аз рӯйи усули Гаусс – Зейдел зарур ва кифоя мебошад, ки бояд қиматҳои хусусии матритсаи C' бо бузургии мутлақ аз як хурд бошанд. Аз сабабе ки матритсаҳои C ва C' аз рӯйи ташкилдиҳандаҳои матритсаи A гуногун ифода меёбанд, онгоҳ шарти мувофиқоии усули Гаусс – Зейдел ва усули итератсияи оддӣ дар ҳолати умумӣ гуногун мебошанд, яъне чунин матритсаҳои A вуҷуд доранд, ки барои онҳо раванди итератсионӣ аз рӯйи усули Гаусс – Зейдел мувофиқ меояд ва аз рӯи усули итератсияи оддӣ бошад, мувофиқ намеояд ва ё баръакс.

Шарти кифоягии мувофиқоии усули итератсияи оддӣ, инчунин барои усули Зейдел низ кофӣ мебошад. Агар ин шартҳо иҷро шаванд, он гоҳ раванд аз рӯи усули Гаусс – Зейдел мувофиқ меояд. Илова бар ин, нисбат ба усули итератсияи оддӣ зудтар мувофиқ меояд.

Дар расми 10.1 алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо ёрии усули Гаусс – Зейдел овада шудааст [3].

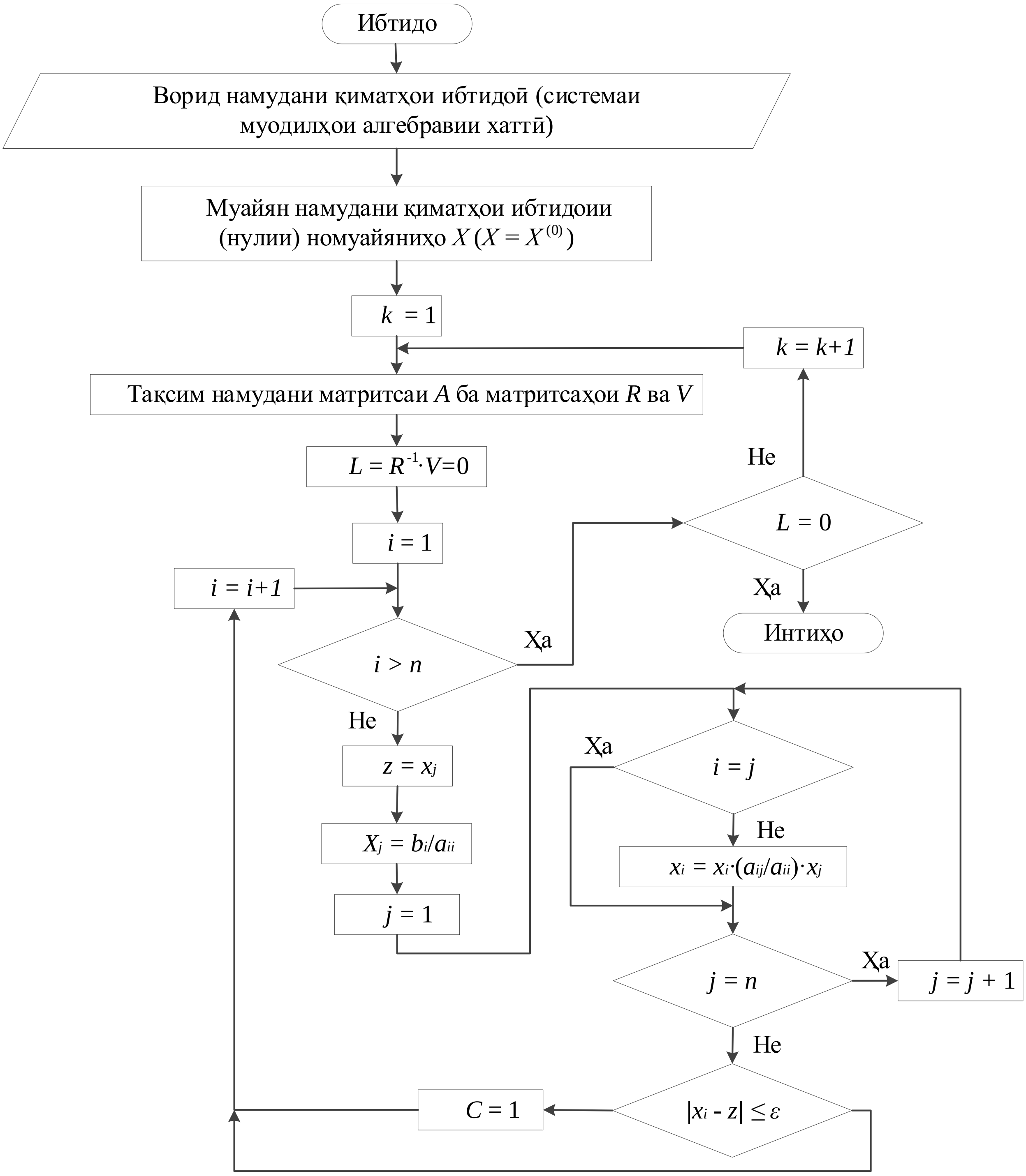

Рисунок 10.1. Алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо ёрии усули Гаусс – Зейдел

Таҷрибаи ҳалли муодилаҳои хаттии ҳолати СЭЭ нишон медиҳад, ки ҳатто дар ҳолатҳои иҷро нагардидани шартҳои кифояи наздикшавӣ (мувофиқоӣ), усули Гаусс – Зейдел одатан нисбат ба усули итератсияи оддӣ бо наздикшавии тезтар амалӣ мегардад, аз ин рӯ, усули Гаусс – Зейдел дар амалияи ҳисоби реҷаҳои барқароршудаи СЭЭ истифодаи худро наёфтааст.

Ҳамин тариқ, ҳам усули Гаусс – Зейдел ва ҳам усули итератсияи оддӣ на ҳамавақт имконияти ба даст овардани ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро таъмин мекунанд, зеро дуршавии (вобаста набудани) равандҳои итератсионии мувофиқ истисно нест. Дар айни замон, шартҳои наздикшавӣ (мувофиқоӣ) (ва ё дуршавӣ (мувофиқ наомадан)) танҳо вобаста ба хосиятҳои матритсаи A муайян карда мешаванд ва на аз мувофиқои ибтидоӣ ва на аз матритсаи сутунии қисми рости система B вобастагӣ надоранд. Ду омили охирин танҳо ба шумораи итератсияҳое таъсир мерасонанд, ки барои ба даст овардани ҳал бо дақиқии додашуда зарур мебошанд. Тартиби рақамгузории муодилаҳо, яъне ҷойивазкунии сатрҳои матритсаи A, метавонад ба вайрон шудани шартҳои зарурӣ ва кифояи наздикшавӣ оварда расонад.

Саволе ба миён меояд, ки оё мумкин нест, ки бо ёрии табдилдиҳии оддии эквивалентии ибтидоии системаи муодилаҳо (яъне табдилдиҳие, ки ҳалли онро тағйир намедиҳад) ҳамеша наздикшавии раванди итератсиониро таъмин кард? Маълум мешавад, ки ҳангоми истифодаи усули Гаусс – Зейдел ин корро кардан имконпазир аст.

Дар ҳақиқат, маълум аст, ки ҳангоми мусбат – муайян будани матритсаи A раванди итератсионӣ бо усули Зейдел ҳамеша наздикшаванда аст. Ҳамин тариқ, агар матритсаи A мусбат-муайян бошад, пас наздикшавӣ кафолат дода мешавад ва агар не, пас системаи ибтидоиро метавон бо роҳи зарб задани он аз тарафи чап ба матритсаи транспонированидашудаи A, яъне бо гузариш аз системаи $A \cdot X = B$ ба ситемаи $A^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot x = A^{\mathrm{T}} \cdot B$, ба намуди эквивалентӣ бо матритсаи коэффисиентҳои мусбат-муайян табдил дод, ё ин ки:

$$A' \cdot X = B', \tag{10.7}$$

дар ин ҷо $A' = A^{\mathrm{T}} \cdot A;\ B' = A^{\mathrm{T}} \cdot B.$

Агар системаи ибтидоӣ ҳалли ягона дошта бошад, яъне агар A – ғайримахсус бошад, пас матритсаи A' мусбат-муайян аст ва раванди итератсионӣ бо усули Гаусс – Зейдел наздикшаванда мебошад.

Барои усули Гаусс – Зейдел матритсаи A ба матритсаҳои R ва V ба таври зерин ҷудо мешавад:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \qquad (10.8)$$

дар ин ҷо, матритсаи R матритсаи секунҷаи поёнӣ мебошад ва муайян намудани матритсаи баръакси он душвортар аст (нисбат ба матритсаи диагоналии R, ки дар усули итератсияи оддӣ истифода бурда мешуд). Бинобар ин, бо истифода аз ифодаи рекуррентии (9.2), ба даст овардани навишти итератсияи усули Гаусс – Зейдел дар шакли матритсавии кушода шабеҳи ба системаи муодилаҳои (9.3) душвортар аст.

Шакли алгебравии навишти итератсияи усули Гаусс – Зейдел қулай мебошад, зеро ҳангоми истифодабарии ин усул, барои ҳисоб намудани наздикшавии нави ҳар як тағйирёбанда боз ифодаи (9.3) истифода бурда мешавад. Ҳангоми усули итератсияи оддӣ низ ҳамин гуна амал иҷро карда мешуд, вале дар ҳар як итератсия саҳеҳ намудани пайдарпаи қиматҳои тағйирёбандаҳо сурат мегирад. Дар итератсияи якум мувофиқи формулаи (9.3), дар асоси наздикшавии $x_1^{(0)}$, қимати тағйирёбандаи $x_1^{(1)}$ ҳисоб карда мешавад. Сипас, дар итертсияи дуюм шабеҳи итератсияи якум қимати нави $x_2^{(1)}$ муайян карда мешавад, аммо дар ифодаи (9.3) на қимати $x_1^{(0)}$ гузошта мешавад, балки қимати наздикшавии $x_1^{(1)}$ гузошта мешавад. Ҳангоми муайян намудани $x_3^{(1)}$, ба ҷои қиматҳои $x_1^{(0)}$ ва $x_2^{(0)}$, муттаносибан қиматҳои наздикшавиҳои $x_1^{(1)}$ ва $ $x_2^{(1)}$ гузошта мешаванд ва ғайра. Ҳангоми муайян намудани $x_i^{(1)}$ қиматҳои наздикшавиҳои $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, …, $x_{i-1}^{(1)}$, ки аллакай дар қадами якуми итератсия ҳисоб карда шудаанд, ва қиматҳои наздикшавиҳои $x_{i+1}^{(0)}$, …, $x_n^{(0)}$ истифода бурда мешаванд.

Барои дилхоҳ итератсияи қадами k – юм бо усули Гаусс – Зейдел дар намуди алгебравӣ ифодаи зеринро истифода бурдан мумкин аст:

$$x_i^{(k)} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{10.9}$$

Мисоли 10.1. Системаи муодилаҳоро бо ёрии усули Гаусс – Зейдел ҳисоб намоед:

$$\begin{cases} 0,354 \cdot \varphi_1 - 0,111 \cdot \varphi_2 - 0,1 \cdot \varphi_3 = -2,05; \\ -0,111 \cdot \varphi_1 + 0,561 \cdot \varphi_2 - 0,2 \cdot \varphi_3 = 9,872; \\ -0,1 \cdot \varphi_1 - 0,2 \cdot \varphi_2 + 0,377 \cdot \varphi_3 = -0,48, \end{cases}$$

Ба сифати наздикшавии ибтидоии қиматҳои нулии тағйирёбандаҳоро менамоем, яъне $\varphi_1 = 0$; $\varphi_1 = 0$; $\varphi_1 = 0$, пас дар қадами ибтидоӣ қимматҳои зеринро ба даст меоварем:

$$\Phi^{(0)} = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(0)} \\ \varphi_2^{(0)} \\ \varphi_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,791 \\ 17,597 \\ -1,273 \end{bmatrix}.$$

Ҳисобро то дақиқияти $\varepsilon \leq 0,001$ идома медиҳем.

Решение. Дар асоси навишти системаи муодилаҳои алгебравии хаттии намуди (10.2) менависем:

$$\begin{cases} \varphi_1^{(k)} = \frac{0,111}{0,354} \cdot \varphi_2^{(k-1)} + \frac{0,1}{0,354} \cdot \varphi_3^{(k-1)} - \frac{2,05}{0,354} = 0,3136 \cdot \varphi_2^{(k-1)} + 0,2825 \cdot \varphi_3^{(k-1)} + 5,791; \\ \varphi_2^{(k)} = \frac{0,111}{0,561} \cdot \varphi_1^{(k)} + \frac{0,2}{0,561} \cdot \varphi_3^{(k-1)} + \frac{9,872}{0,561} = 0,198 \cdot \varphi_1^{(k)} + 0,3565 \cdot \varphi_3^{(k-1)} + 17,597; \\ \varphi_3^{(k)} = \frac{0,1}{0,377} \cdot \varphi_1^{(k)} + \frac{0,2}{0,377} \cdot \varphi_2^{(k)} - \frac{0,48}{0,377} = 0,265 \cdot \varphi_1^{(k)} + 0,5305 \cdot \varphi_2^{(k)} - 1,273. \end{cases}$$

Натиҷаи ҳисоб бо ёрии усули итератсияи оддӣ дар ҷадвали 9.1 оварда шудааст.

Таблица 10.1. Қимматҳои нумуайяниҳо дар қадами итератсионии *k*

k	$\varphi_1^{(k)}$	$\varphi_2^{(k)}$	$\varphi_3^{(k)}$
0	-5,791	16,451	5,918
1	1,039	19,913	9,566
2	3,155	21,632	11,039
3	4,110	22,346	11,672
4	4,513	22,651	11,940
5	4,685	22,781	12,055
6	4,757	22,836	12,103
7	4,789	22,860	12,124
8	4,802	22,870	12,133
9	4,807	22,874	12,137
10	4,810	22,876	12,138
11	4,811	22,876	12,139

Азбаски қимати номуайяниҳо дар ду итератсияҳои пайдарҳам, яъне дар итератсияҳои 10 ва 11 то хатогии ε = 0,001 мувофиқ меоянд, яъне

$$\Delta\varphi_1 = |\varphi_1^{(11)} - \varphi_1^{(10)}| = |4{,}811 - 4{,}810| = 0{,}001 = \varepsilon;$$

$$\Delta\varphi_2 = |\varphi_2^{(11)} - \varphi_2^{(10)}| = |22{,}876 - 22{,}876| = 0 < \varepsilon;$$

$$\Delta\varphi_3 = |\varphi_3^{(11)} - \varphi_3^{(10)}| = |12{,}139 - 12{,}138| = 0{,}001 = \varepsilon;$$

аст, пас метавон хулоса баровард, ки ҳал ба даст омадааст:

$$\varphi_1 = 4{,}811;\ \varphi_2 = 22{,}876;\ \varphi_3 = 12{,}139.$$

Адабиёт

1. Веников В.А. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для студентов вузов / В.А. Веников, Э.Н. Зуев, И.В. Литкенс и др., под ред. В.А. Веникова – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981. – 288 с.

2. Филяев К.Ю. Математические задачи энергетики: Учебно-методический комплекс / К.Ю. Филяев – Челябинск: 2005. – 212 с.

3. Джуразода Ш.Ҷ., Назиров Х.Б., Ганиев З.С., Ишан-Ходжаев Р.С. Математические задачи энергетики: Учебно-методический комплекс – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2026. – 140 с.