

Mathematical Problems of Electric Power Systems

WEEK 11 - Methods for solving non-linear steady-state equations in power systems.

Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi

Lecturer

(Shohin Jurazoda)

**УСУЛҲОИ ҲИСОБИ МУОДИЛАҲОИ
ҒАЙРИХАТТИИ РЕЧАҲОИ
БАРҚАРОРШУДАИ СИСТЕМАИ
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКӢ**

Мундариҷаи лексия:

1. Истифодаи усули Гаусс-Зейдел барои ҳалли муодилаҳои гиреҳии ғайрихаттӣ.
2. Усули Нютон.
3. Алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои гиреҳии ғайрихаттӣ бо ёрии усули Нютон.
4. Ҳамгирии усулҳои итератсионӣ ҳангоми ҳисоби речаҳои барқароршуда.
5. Ҳамгирии ҳалли муодилаҳои гиреҳӣ.
6. Адабиёт.

Истифодаи усули Гаусс-Зейдел барои ҳалли муодилаҳои гиреҳии ғайрихаттӣ. Усули Гаусс-Зейделро барои ҳалли муодилаҳои гиреҳии ғайрихаттӣ истифода бурдан мумкин аст ва онро ба намуди зерин менависанд:

$$y_{ii} \cdot U_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij} \cdot U_j = \frac{S_i^*}{\sqrt{3} \cdot U_i^*} + y_{iB} \cdot U_B, \quad (11.1)$$

Дар ин ҳолат, алгоритми усули мазкур бетағйир мемонад (нигаред ба расми 10.1) ва ифодаи рекуррентии раванди итератсионӣ намуди зеринро мегирад:

$$U_i^{(k)} = \frac{1}{y_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} y_{ij} \cdot U_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \cdot U_j^{(k-1)} + \frac{S_i^*}{\sqrt{3} \cdot U_i^{*(k-1)}} + y_{iB} \cdot U_B \right), \quad (11.2)$$

дар ин ҷо, $i = 1, \dots, n$.

Дар амалия, ифодаи комплексии ифодаи (11.2) ба ташкилдихандаҳои ҳақиқӣ ва мавҳум ҷудо карда шуда, дар шакли ададҳои ҳақиқӣ навишта мешаванд. Дар ин ҳолат, шумораи муодилаҳо ду баробар зиёд мешаванд ва ба шумораи онҳо ба $2 \cdot n$ баробар мешавад. Ифодаҳои тайёри (11.2) дар шакли ҳақиқӣ дар [1] оварда шудаанд.

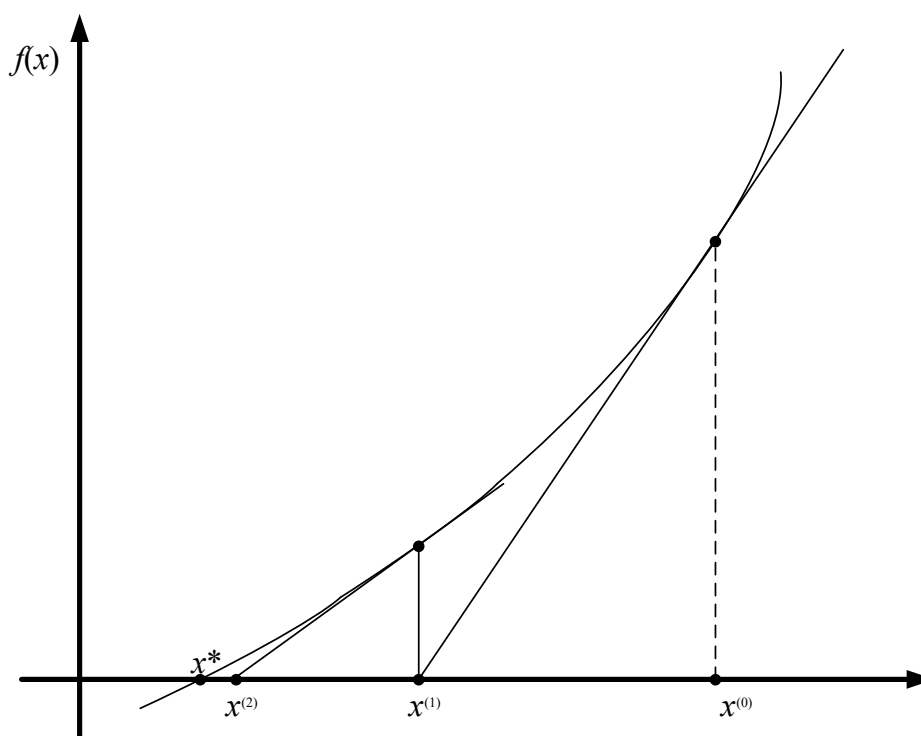
Усули Нютон. Ин усул барои ҳалли намудҳои гуногуни системаҳои муодилаҳои ғайрихаттӣ истифода мешавад [2, 3]. Бартариҳои асосии он нисбат ба дигар усулҳо дар он аст, ки усули мазкур дорой суръати баланди наздикшавӣ

мебошад. Ҳангоми ҳалли муодилаҳои гиреҳии ғайрихаттӣ, агар ба сифати наздикшавии ибтидоӣ шиддатҳои номиналии гиреҳҳо қабул карда шаванд, новобаста аз андозаи системаи муодилаҳои ҳалшаванда, раванди итератсионӣ дар 2,... 5 итератсия то саҳиҳии лозима наздикшавӣ дида мешавад.

Мақсади методи Нютон аз он иборат аст, ки дар ҳар як қадами раванди итератсионӣ системаи муодилаҳои ғайрихаттӣ, хаттӣ гардонида мешаванд ва системаи муодилаҳои хаттишуда бо истифода аз яке усулҳои ҳалли системаҳои муодилаҳои алгебрии хаттӣ (бештар бо усули Гаусс) ҳал карда мешаванд. Мақсади истифодаи усули Нютонро дар мисоли муодилаи ғайрихаттӣ дида мебароем, ки дорой як номаълум аст:

$$f(x) = 0. \quad (11.3)$$

Бигзор функсияи $f(x)$ – функсияи бифосила дифференциалшаванда ва нуқтаи x^* ҳалли муодилаи (11.3) бошад, ки дар он қачхаттаи $f(x)$ аз сифр мегузарад (расми 11.1).



Расми 11.1. Алгоритми раванди итератсионӣ бо истифода аз усули Нютон

Функсияи $f(x)$ – ро дар атрофи наздикшавии ибтидоии $x^{(0)}$ ба қатори Тейлор мекушоем ва танҳо бо ду узви аввали ин қатор маҳдуд мешавем:

$$f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)}) \cdot (x - x^{(0)}) = 0. \quad (11.4)$$

Аз муодилаи хаттикардашудаи (11.4) ислоҳи $\Delta x^{(0)}$ – ро барои наздикшавии ибтидоии $x^{(0)}$ муайян мекунем:

$$\Delta x^{(0)} = x - x^{(0)} = -f(x^{(0)})/f'(x^{(0)}).$$

Сипас, наздикшавии якуми тағйирёбандаи $x^{(1)}$ чунин муайян карда мешавад:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}.$$

Наздикшавии дууми тағйирёбандаи $x^{(2)}$ низ шабеҳи ҳамин муайян карда мешавад:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = x^{(1)} - f(x^{(1)})/f'(x^{(1)}),$$

ва ғайра.

Барои дилхоҳ қадами m тағйирёбандаи $x^{(m)}$ ба намуди зерин муайян карда мешавад:

$$x^{(m)} = x^{(m-1)} + \Delta x^{(m-1)} = x^{(m-1)} - f(x^{(m-1)})/f'(x^{(m-1)}).$$

Наздикшавии раванди итератсионӣ ҳангоми иҷро шудани шарти зерин ба даст омада ҳисобида мешавад:

$$|f(x)| \leq \varepsilon,$$

где, ε – дақиқии ҳисоб.

Акнун, ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии ғайрихаттиро бо усули Нютон, ки дар шакли зерин навишта шудаанд, баррасӣ мекунем:

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix} = [f_i(X)] = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11.5)$$

дар ин ҷо, $F(X)$ – вектор – функсия, X – вектори сутунии номаълумҳои x_1, x_2, \dots, x_n мебошад.

Ҳар як функсияи $f_i(x)$ системаи муодилаҳои (11.5) – ро дар нуктаи наздикшавии муайяни $x^{(m)}$ бо истифода аз қатори Тейлор хаттӣ мекунем:

$$f_i(X^{(m)}) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|_{X=X^{(m)}} (x_1 - x_1^{(m)}) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right|_{X=X^{(m)}} (x_2 - x_2^{(m)}) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \Big|_{X=X^{(m)}} (x_n - x_n^{(m)}) = 0.$$

Системаи хаттикардашудаи (11.4) – ро дар шакли зерин менависем:

$$F(X^{(m)}) + W(X^{(m)}) \cdot (X - X^{(m)}) = 0, \quad (11.6)$$

дар ин ҷо $W(X^{(m)})$ – матрисаи ҳосилаҳои хусусии тартиби аввал, яъне матрисаи Якоби мебошад ва онро ба таври зайл муайян мекунамд:

$$W(X^{(m)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X=X^{(m)}}. \quad (11.7a)$$

Алгоритми ҳисоб бо истифода аз усули Нютон дар расми 11.2 оварда шудааст.

Наздиқшавии дилхоҳи $X^{(m)}$ ба намуди зерин муайян карда мешавад:

$$X^{(m)} = X^{(m-1)} + \Delta X^{(m-1)}. \quad (11.7b)$$

Дар ин ҳолат, ислоҳи $\Delta X^{(m-1)}$ вобаста ба ҳалли системаи хаттии (11.4), ки дар шакли зерин навишта шудааст, ҳисоб карда мешавад:

$$W(X^{(m-1)}) \cdot \Delta X^{(m-1)} = -F(X^{(m-1)}). \quad (11.8)$$

Назорати ҳамгароии раванди итератсионии усули Нютон тавассути нобаробарии зерин амалӣ карда мешавад:

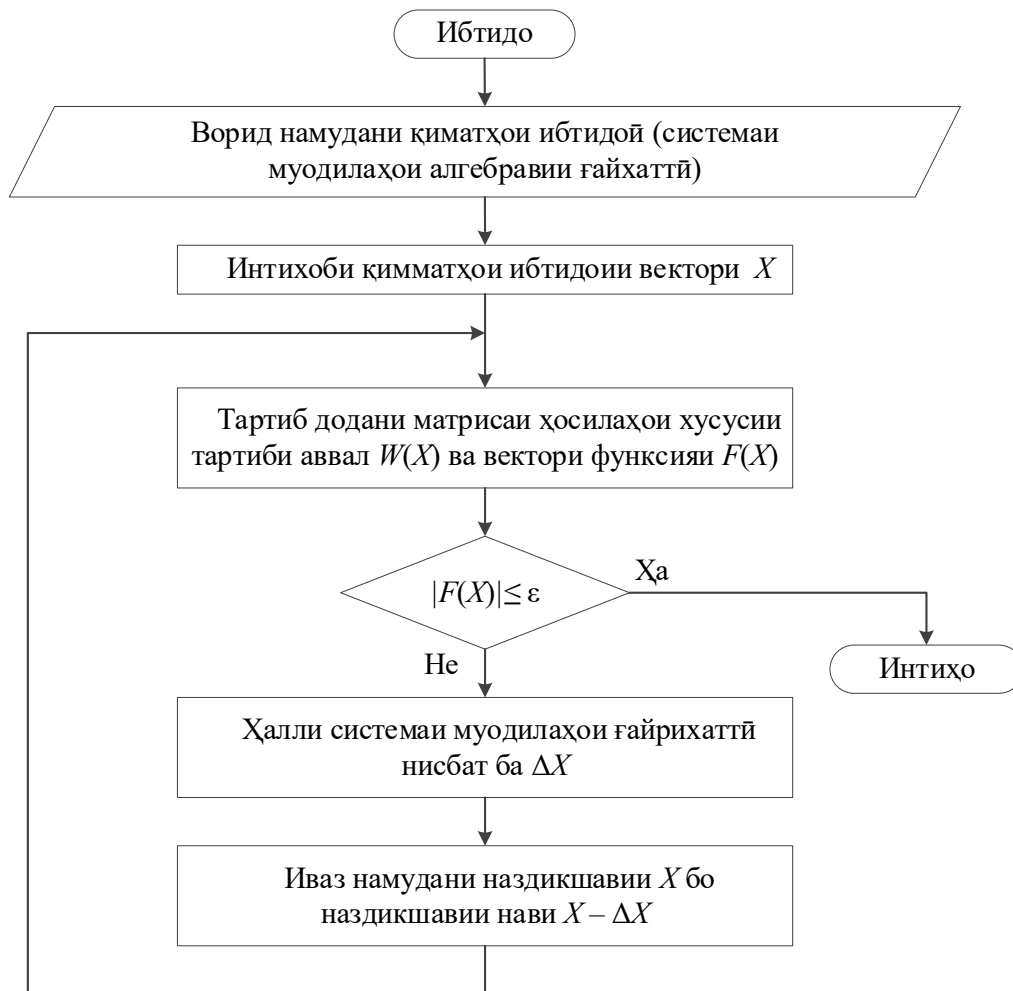
$$\|F(X^{(m-1)})\| \leq \varepsilon. \quad (11.9)$$

Мисоли 11.1. Системаи муодилаҳои ғайрихаттии зеринро бо истифода аз усули Нютон ҳал намоед:

$$\begin{cases} x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 = 6 \\ 2 \cdot x_1^3 - 3 \cdot x_2 = 13, \end{cases}$$

Ҳангоми ҳисоб ба сифати маълумоти ибтидоӣ қиматҳои зеринро қабул менамоем:

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 0,01.$$



Расми 11.2. Алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои ғайрихаттӣ бо истифода аз усули Нютон

Ҳал. Системаи муодилаҳои ғайрихаттӣ додасударо дар шакли (11.5) менависем [4]:

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & +2 \cdot x_2^2 & -6 \\ 2 \cdot x_1^3 & -3 \cdot x_2 & -13 \end{bmatrix} = 0.$$

Матритсаи Якоби барои системаи муодилаҳои додасуда намуди зеринро мегирад:

$$W(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 & 4 \cdot x_2 \\ 6 \cdot x_1^2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Дар қадами якуми итератсионӣ системаи муодилаҳои хаттии намуди $W(X^{(0)}) \cdot \Delta X^{(0)} = -F(X^{(0)})$ тартиб дода мешаванд:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 1^2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1^2 & +2 \cdot 1^2 & -6 \\ 2 \cdot 1^3 & -3 \cdot 1 & -13 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \Delta x_1^{(0)} + 4 \cdot \Delta x_2^{(0)} = 3 \\ 6 \cdot \Delta x_1^{(0)} - 3 \cdot \Delta x_2^{(0)} = 14; \end{cases}$$

$$\Delta X^{(0)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,17 \\ -0,33 \end{bmatrix}.$$

Наздиқшавии $X^{(1)}$ ба намуди зерин муайян карда мешавад:

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,17 \\ -0,33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,17 \\ 0,67 \end{bmatrix};$$

Вектори функция дар нуқтаи $X^{(1)}$ қимати зеринро доро мешавад:

$$F(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3,17^2 & 2 \cdot 0,67^2 & -6 \\ 2 \cdot 3,17^3 & -3 \cdot 0,67 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,95 \\ 48,7 \end{bmatrix} > \varepsilon.$$

Азбаски он ки $|F(X^{(1)})| > \varepsilon$, пас қадами дуюм лозим аст.

Дар қадами дуюми раванди итератсионӣ ҳисобҳо ба ҳамин монанд гузаронида мешаванд, яъне $W(X^{(1)}) \cdot \Delta X^{(1)} = -F(X^{(1)})$:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 3,17 & 4 \cdot 0,67 \\ 6 \cdot 3,17^2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(1)} \\ \Delta x_2^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4,95 \\ 48,7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6,34 & 2,68 \\ 60,29 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(1)} \\ \Delta x_2^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4,95 \\ 48,7 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} 6,34 \cdot \Delta x_1^{(1)} + 2,68 \cdot \Delta x_2^{(1)} = -4,95 \\ 60,29 \cdot \Delta x_1^{(1)} - 3 \cdot \Delta x_2^{(1)} = -48,7; \end{cases}$$

$$\Delta X^{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(1)} \\ \Delta x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ 0,06 \end{bmatrix};$$

Наздиқшавии $X^{(2)}$ ба намуди зерин муайян карда мешавад:

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X^{(1)} = \begin{bmatrix} 3,17 \\ 0,67 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,8 \\ 0,06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,37 \\ 0,73 \end{bmatrix};$$

Вектори функция дар нуқтаи $X^{(2)}$ қимати зеринро доро мешавад:

$$F(X^{(2)}) = \begin{bmatrix} 2,37^2 & 2 \cdot 0,73^2 & -6 \\ 2 \cdot 2,37^3 & -3 \cdot 0,73 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,68 \\ 11,43 \end{bmatrix} > \varepsilon.$$

Азбаски он ки $|F(X^{(2)})| > \varepsilon$, пас қадами сеюм лозим аст.

Натиҷаи ҳисоб бо ёрии усули Нютон дар ҷадвали 11.1 оварда шудааст.

Ҷадвали 11.1. Қимматҳои номуайяниҳо дар қадами итератсионии k

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\varepsilon = 0,01$	
			$f_1(x)$	$f_2(x)$
0	1	1	-3	-14
1	3,17	0,67	4,95	48,7
2	2,37	0,73	0,68	11,43
3	2,03	1,05	0,33	0,58
4	2	1	0	0

Ҳамин тавр, усули Нютон дар қадами чорум наздиқшуда мебошад ва қиматҳои номуайяниҳо зерин мебошанд: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$.

Алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои гиреҳии ғайрихаттӣ бо ёрии усули Нютон. Системаи муодилаҳои гиреҳии ғайрихаттӣ, ки шабеҳи ифодаи (11.5) оварда шудааст, бо истифода аз усули Нютон ҳисоб намудан мумкин аст:

$$F(U) = \begin{bmatrix} f_1(U) \\ f_2(U) \\ \dots \\ f_n(U) \end{bmatrix} = [f_i(U)] = 0; \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.10)$$

дар ин ҷо, U – вектори шиддатҳои гиреҳии U_1, U_2, \dots, U_n .

Дар ин ҳолат, ҳар як муодилаи i – юми системаи муодилаҳои ғайрихаттӣ шиддати гиреҳӣ дар яке аз шаклҳои зерин навишта мешавад:

1. Дар шакли тавозуни чараёнҳо:

$$f_i(U) = \frac{S_i^*}{\sqrt{3} \cdot U_i^*} - Y_{ii} \cdot U_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} Y_{ij} \cdot U_j = 0; \quad (1.11)$$

2. Дар шакли тавозуни иқтидорҳо:

$$f_i(U) = S_i^* - \sqrt{3} \cdot Y_{ii} \cdot U_i \cdot U_i^* + \sqrt{3} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} Y_{ij} \cdot U_j \cdot U_i^* = 0; \quad (11.12)$$

Дар ифодаҳои (11.11) ва (11.12) чамъшавандаҳое, ки ба зарби $Y_{iB} \cdot U_B$ мувофиқанд, дар шакли чамъи $Y_{ij} \cdot U_j$ ворид шудаанд.

Барои истифодаи усули Нютон, ҳисоб намудани ҳосилаҳои хусусии функсияи $f_i(U)$ аз рӯи қиматҳои комплексии шиддати гиреҳҳо талаб карда мешавад. Аммо, функсияи $f_i(U)$ аз рӯи U^* дифференциал карда намешавад, зеро ҳосилаи бузургии комплексии комапайванди U_i^* , ки ба муодилаҳои (11.11) ва (11.12) дохил мешавад, аз рӯи миқдори комплекси мустақими шиддати U_i вучуд надорад. Бинобар ин, барои истифодаи усули Нютон зарур аст, ки ҳар як муодилаи системаи ғайрихаттӣ ба қисмҳои ҳақиқӣ ва мавҳум ҷудо карда шавад ва он ҳамчун функсияи ташкилдихандаҳои шиддати ҳақиқии U' ва мавҳуми U'' баррасӣ гардад.

Ба сифати мисол, татбиқи усули Нютонро барои ҳалли муодилаҳои ғайрихаттии гиреҳӣ, ки дар намуди (11.11) навишта шудаанд, баррасӣ менамоем. Функсияи $f(U)$ ба қисмҳои ҳақиқӣ $f'_i(U', U'')$ ва мавҳум $f''_i(U', U'')$ ҷудо намуда, муодилаҳои зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} f'_i(U', U'') = \operatorname{Re} \left[\frac{S_i}{\sqrt{3} \cdot U_i} \right] - g_{ii} \cdot U'_i - b_{ii} \cdot U''_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (g_{ij} \cdot U'_j + b_{ij} \cdot U''_j) = 0; \\ f''_i(U', U'') = \operatorname{Im} \left[\frac{S_i}{\sqrt{3} \cdot U_i} \right] - g_{ii} \cdot U'_i - b_{ii} \cdot U''_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (g_{ij} \cdot U'_j + b_{ij} \cdot U''_j) = 0. \end{cases} \quad (11.13)$$

Матритсаи Якобии системаи (9.7a) ба намуди зерин тартиб дода мешавад:

$$W(U) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f'_1}{\partial U'_1} & \cdots & \frac{\partial f'_1}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial f'_1}{\partial U''_1} & \cdots & \frac{\partial f'_1}{\partial U''_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f'_n}{\partial U'_1} & \cdots & \frac{\partial f'_n}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial f'_n}{\partial U''_1} & \cdots & \frac{\partial f'_n}{\partial U''_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f''_1}{\partial U'_1} & \cdots & \frac{\partial f''_1}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial f''_1}{\partial U''_1} & \cdots & \frac{\partial f''_1}{\partial U''_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f''_n}{\partial U'_1} & \cdots & \frac{\partial f''_n}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial f''_n}{\partial U''_1} & \cdots & \frac{\partial f''_n}{\partial U''_n} \end{bmatrix}, \quad (11.14)$$

дар ин чо, $U = \begin{bmatrix} U' \\ U'' \end{bmatrix}$ – вектори ташкилдихандаҳои шиддатҳои гиреҳии $U'_i, \dots, U'_n, \dots, U''_i, \dots, U''_n$ мебошанд.

Элементҳои хусусии (диагналии) матритсаи Якоби ба таври зайл ҳисоб карда мешаванд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'_i}{\partial U'_i} &= \frac{\partial}{\partial U'_i} \cdot \operatorname{Re} \left[S_i / \left(\sqrt{3} \cdot U_i \right) \right] - g_{ii} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Re} \left[S_i / \left(\sqrt{3} \cdot U_i \right) \right] - g_{ii} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial U_i} \left(S_i / U_i \right) \cdot \frac{\partial U_i}{\partial U'_i} \right] - g_{ii} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{\partial}{\partial U_i} \left(S_i / U_i \right) \cdot \frac{\partial}{\partial U'_i} (U_i - jU_i'') \right] - g_{ii} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Re} \left[S_i / U_i^2 \right] - g_{ii}; \\ \frac{\partial f'_i}{\partial U''_i} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Im} \left[S_i / U_i^2 \right] - b_{ii}; \quad \frac{\partial f''_i}{\partial U'_i} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Im} \left[S_i / U_i^2 \right] - b_{ii}; \\ \frac{\partial f''_i}{\partial U''_i} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Re} \left[S_i / U_i^2 \right] - g_{ii}; \end{aligned}$$

Элементҳои мутақобили (ғайридиагналии) матритсаи Якоби ба таври зайл ҳисоб карда мешаванд:

$$\frac{\partial f'_i}{\partial U'_j} = g_{ij}; \quad \frac{\partial f'_i}{\partial U''_j} = b_{ij}; \quad \frac{\partial f''_i}{\partial U'_j} = -b_{ij}; \quad \frac{\partial f''_i}{\partial U''_j} = g_{ij}.$$

Матритсаи ноқилиятҳои фаъл ва ғайрифаълро тартиб медиҳем:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12} & \dots & -g_{1n} \\ -g_{21} & g_{22} & \dots & -g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -g_{n1} & -g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix};$$

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\left[S_1^*/U_1^{*2}\right] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}\left[S_2^*/U_2^{*2}\right] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \operatorname{Re}\left[S_n^*/U_n^{*2}\right] \end{bmatrix};$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{Im}\left[S_1^*/U_1^{*2}\right] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \operatorname{Im}\left[S_2^*/U_2^{*2}\right] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \operatorname{Im}\left[S_n^*/U_n^{*2}\right] \end{bmatrix}.$$

дар ин ҷо, D_1 ва D_2 – матритсаҳои диагональӣ мебошанд.

Матритсаи Якоби дар намуди ҷамъи ду блоки матритсаҳо тасаввур намудан мумкин аст:

$$W(U) = Y + D = \begin{bmatrix} -G & -B \\ B & -G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -D_1 & D_2 \\ -D_2 & D_1 \end{bmatrix}.$$

Системаи ҳаттишудаи муодилаҳои ҳақиқии гирехӣ дар қадами дилхоҳи m дар шакли зерин навишта мешавад:

$$W(U^{(m)}) \cdot \Delta U^{(m)} = -F(U^{(m)}), \quad (11.15)$$

дар ин ҷо, $F(U) = \begin{bmatrix} F' \\ F'' \end{bmatrix}$ – вектори ташкилдиҳандаҳои функцияҳои

$$f'_1, f'_2, \dots, f'_n, f''_1, f''_2, \dots, f''_n.$$

Наздиқшавии $\Delta U^{(m)}$ ба таври зерин муайян карда мешавад:

$$U^{(m)} = U^{(m-1)} + \Delta U^{(m-1)}.$$

Алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои гиреҳии ғайрихатӣ бо ёрии усули Нютон дар расми 11.3 оварда шудааст.

Ислоҳи $\Delta U^{(m)}$ тавассути ҳалли системаи (11.13) бо истифода аз дилхоҳ усули ҳалли системаи муодилаҳои хаттии алгебравӣ ҳисоб карда мешавад. Ҳамгирии ва ё ҳамгарии равандҳои итератсионӣ бо усули Нютон тавассути шарти зерин назорат карда мешавад:

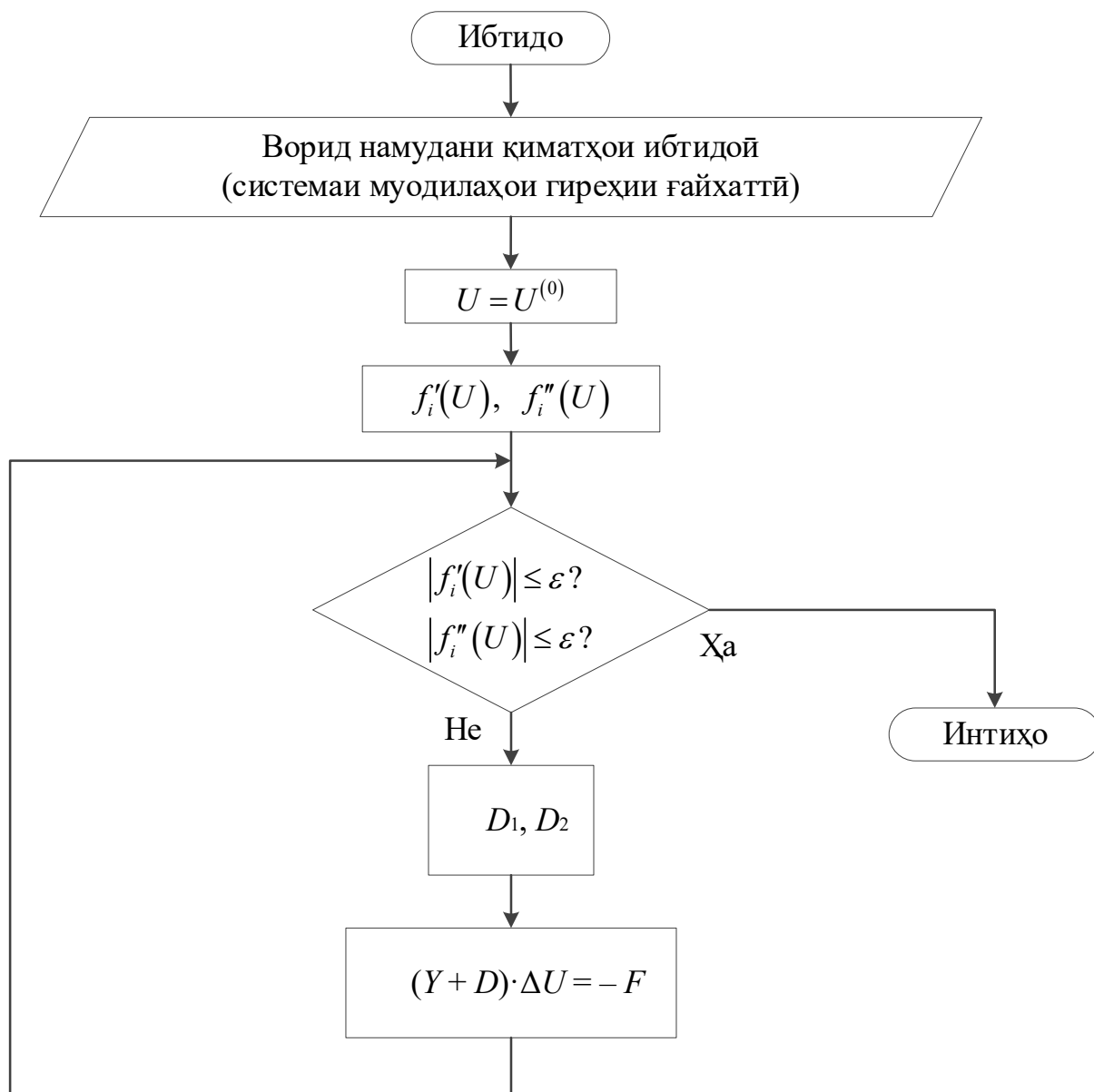
$$\left| F\left(X^{(m)}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

Системаи (11.13) матрисаи зарибҳоеро дорад, ки аз матрисаи муқаррарии ноқилиятҳо танҳо бо ислоҳоти диагоналӣ фарқ мекунад. Қимати ин ислоҳот ҳангоми ҳисоби речаҳое, ки аз речаҳои ҳудудӣ дур мебошанд, нисбат ба қиматҳои мувофиқи ноқилиятҳои хусусии гиреҳҳо ба таври назаррас хурдтар аст. Ин ҳолат дар татбиқи соддакардашудаи усули Нютон барои муодилаҳои гиреҳӣ, дар шакли мувозинати чараёнҳо, истифода мешавад.

Ҳамгирии усулҳои итератсионӣ ҳангоми ҳисоби речаҳои барқароршуда. Ҳамгирии усулҳои итератсионии ҳисоби речаҳои барқароршудаи СЭЭ гуногун мебошад. Он метавонад суст бошад ё умуман вучуд надошта бошад, масалан, ҳангоми ҳисоби речаҳои ба речаҳои ҳудудӣ наздик, ҳамгирии усулҳои итератсионӣ бо самаранокии истифодаи мошинҳои электрони ҳисоббарор (МЭХ) алоқамандии зич дорад.

Талаботе, ки ба равандҳои итератсионӣ гузошта мешаванд, дар бисёр мавридҳо метавонанд мутақобил ба назар расанд. Ин ҳолатро дар мисоли ҳалли системаи хаттии намуди $A \cdot X = B$ бо усули итератсионӣ шарҳ медиҳем. Ҳамгирии тезтари (фаврии) ҳалли системаи муодилаҳоро мувофиқи ифодаи (9.8) ҳангоми иҷрои тақсимои зерини матрисаи A ба даст овардан мумкин аст, яъне $A : S = A$ ва $T = 0$. Дар ин ҳолат матрисаи T матрисаи диагоналие мебошад, ки вобаста ба матрисаи (9.10) муайян карда мешавад ва қисми боқимондаи матрисаро бо матрисаи S ишора мекунем. Дар ин ҳолат, дар ифодаи (9.9) ҳосили зарби матрисаҳои S^{-1} ва T ба сифр баробар мешавад. Қадами аввали

раванди итератсионӣ ягона мешуд ва суръати ҳамгирой баландтарин мегардид. Аммо, тартиби баръакскунии матрисаи $S = A$ ҳангоми ҳисоб дар МЭХ бесамар мешавад, зеро маҳз ҳамин сабаби асосии ҷустуҷӯи тақсимои дигар мебошад.



Расми 11.3. Алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои ғиреҳии ғайриҳатӣ бо ёрии усули Нютон

Дар сифати матритсаи S метавон диагонали матритсаи A – ро гирифт ва ҳисоби итератсиониро бо ёрии усули итератсияи оддӣ иҷро кард, ки дар он гузариш ба наздикшавии навбатӣ нисбат ба ҳар усули дигар соддатар мебошад. Дар баробари ин, дар ин усул, мисли ҳар гуна усулҳои итератсионӣ, масъалаи муҳим ба миён меояд: оё раванди итератсионӣ ҳамгаро мебошад ва агар ҳамгаро бошад, пас бо кадом суръат?

Савол дар бораи ҳамгароии раванди итератсионӣ ба чизи асосӣ дахл дорад: дар кадом шароит ҳамгароии равандро кафолат додан мумкин аст ва оё он ҳамеша имконпазир аст? Нақши асосии ҳалқунанда барои посух ба ин савол ба қиматҳои хоси ҳосили зарби матрисаҳои S^{-1} ва T тааллуқ дорад.

Раванди итератсионии ҳалли системаҳои муодилаҳои хаттии алгебравии намуди (9.11) танҳо дар сурате ҳамгаро мешавад, агар ҳар як қимати хоси λ_i – и матрисаи $S^{-1} \cdot T$ ба нобаробарии $|\lambda_i| < 1$ ҷавобгӯ бошад [3]. Азбаски рақамҳои i ($i = 1, 2, \dots, n$) ба қиматҳои хос одатан бо тартиби камшавии қиматҳои мутлақи онҳо дода мешаванд:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|,$$

пас, шарти мазкурро дар шакли зерин навиштан мумкин аст:

$$|\lambda_n| < 1. \quad (11.16)$$

Муайян кардани қимати хоси ибтидоии матриса бо талаботи зиёди хотираи ҳисоббарорӣ алоқаманд аст. Ҳангоми санчиши амалии меъёри ҳамгароии (11.16) одатан аз меъёрҳои матрисаи $S^{-1} \cdot T$ – ро истифода мебаранд. Барои ҳамгароии раванди итератсионии ҳалли системаи муодилаҳои хаттии алгебрави кифоя аст, ки яке аз се меъёрҳои матрисаи $S^{-1} \cdot T$ аз як хурд бошад. Ба ибораи дигар, бояд ҳадди ақал яке аз шартҳои зерин иҷро шавад:

$$\|S^{-1} \cdot T\|_1 < 1; \quad (11.17a)$$

$$\|S^{-1} \cdot T\|_2 < 1; \quad (11.17б)$$

$$\|S^{-1} \cdot T\|_3 < 1; \quad (11.17в)$$

Агар барои санчиши меъёри ҳамгароии усули итератсияи оддӣ аз шарти зерин истифода барем:

$$\|S^{-1} \cdot T\|_3 < 1,$$

пас, дар асоси ифодаи (11.17б) хулосаи зеринро баровардан мумкин аст: усули итератсияи оддӣ дар ҳолате ҳамгиро мешавад, ки агар модули элементҳои диагоналии матрисаи A – и системаи (8.1) аз суммаи модули дигар элементҳо дар ҳар як сатр калонтар бошад:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} |a_{ij}|, \quad i(i = 1, 2, \dots, n). \quad (11.18)$$

Новобаста ба он ки усулҳои Зейдел ва итератсии оддӣ аз рӯи суръат ва мавҷудияти ҳамгирӣ аз ҳам фарқ мекунад, аммо тафтиш намудани усули Зейдел низ аз рӯи меъёрҳои усули итератсияи оддӣ (11.18) амалӣ карда мешавад.

Масъалаҳои ҳамгирӣи раванди итератсионӣи ҳалли системаи муодилаҳои хаттӣ алгебравӣ дар [3] муфассал баррасӣ шудаанд.

Ҳамгирӣи ҳалли муодилаҳои гирехӣ. Барои муодилаҳои гирехӣ шартҳои кофӣи конвергенсияи (11.17) усулҳои итератсияи оддӣ ва Зейдел одатан иҷро намешаванд. Аз ин рӯ, ҳангоми ҳалли системаи муодилаҳои гирехӣ, ҳатто бо усули Зейдел, кафолат додани ҳамгирӣи имконпазир нест. Бо вучуди ин, таҷрибаи калони ҳисобкуниҳо дар МЭҶ нишон медиҳад, ки барои аксари нақшаҳо ва речаҳои муқаррарӣи истифодабарӣи шабакаҳои электрикӣ, ҳалли муодилаҳои гирехӣ бо усули Зейдел устуворона наздик мешавад ва натиҷаҳои гирифташуда, қобили қабул мебошанд.

Ба ҳамгирӣи раванди итератсионӣи ҳалли муодилаҳои гирехӣ омилҳои гуногун таъсир мерасонанд. Якчанд омилҳои асосӣ ба назар мегирем, ки инҳо мебошанд: параметрҳои нақшаҳои электрии (муқовиматҳо, ноқилияти ғайрифазоли шохаҳо ва гирехҳо) ва параметрҳои речавӣи шабака (ҷараёнҳои доданда, иқтидори истеъмолкунандагон ва манбаҳои энергияи электрикӣ) ва ғайраҳо.

Ҳамгирӣи усулҳои итератсионӣи ҳисоби речаҳои барқароршуда ҳангоми мавҷуд будани дастгоҳҳои ҷуброни тӯлии ғунҷоишӣ (ДҚТГ) дар нақшаи СЭЭ бадтар мешавад. Ин дастгоҳҳо барои баланд бардоштани қобилияти гузаронандагии хатҳои интиқоли барқ (ХИБ) истифода бурда мешаванд ва онҳо пай дар пай ба ХИБ пайваст карда мешаванд. Намунаи ХИБ бо ДҚТГ ХИБ – и 500 кВ «Шимол – Ҷануб» (байни зеристгоҳҳои Душанбе – 500 ва Суғд – 500 дар ҚТ) мебошад.

Ғунҷоиш дорои муқовимати ғайрифазоли манфӣ ва индуктивият бошад – муқовимати ғайрифазоли мусбат мебошад. Мавҷудияти муқовиматҳои манфӣ дар нақшаи бадалии шабака боиси кам шудани ноқилиятҳои хусусӣ

алоҳидаи матритсаи Y мегардад, ки дар натиҷа барои муодилаҳои гиреҳӣ шартҳои конвергенсия (11.18) суҷт ва вайрон мешаванд.

Боиси бадшавии ҳамгироӣ инчунин автотрансформаторҳо шуда метавонанд: майдони магнитии умумии печай шиддати миёна ва нақшаи бадалии сефазаи автотрансформатор одатан дорои муқовимати ҳисобии манфӣ мебошанд, бинобар ин дар нақшаи бадалии шабакаи электрикӣ автотрансформаторҳо вазъиятеро ба вуҷуд меоранд, ки ба мавҷудияти ДҚТГ монанд аст.

Суҷт ҳамгиро будани системаи муодилаҳоро нисбат ба маълумоти ибтидоӣ дар мисоли ҳисоби системаи муодилаҳои зерин дида мебароем:

$$\begin{cases} 10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 & = 190 \\ & + x_2 + 100 \cdot x_3 = 1110; \\ 50 \cdot x_1 + 50,02 \cdot x_2 & + x_3 = 961,2. \end{cases}$$

Ҳалли система: $x_1 = 9$, $x_2 = 10$ ва $x_3 = 11$.

Ин мисол ҳассосияти ҳалли системаро ба қиматҳои зарибҳои назди номаълумҳо хуб нишон медиҳад. Агар мақсаднок ва ё тасодуфан ҳиссаи 0,02 – ро дар қзарибии назди номаълуми x_2 дар муодилаи сеюм гузорем, системаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} 10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 & = 190 \\ & + x_2 + 100 \cdot x_3 = 1110; \\ 50 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 & + x_3 = 961,2. \end{cases}$$

Ҳалли системаи муодилаҳо: $x_1 = 29$, $x_2 = -10$ ва $x_3 = 11,2$.

Системаҳои муодилаҳои гиреҳии суҷт наздикшаванда метавонанд адади наздикшавии p – ро дошта бошанд, ки ба садҳо ҳазор ва бештар аз он мерасад. Ҳалли системаи муодилаҳо бо p – и калон ҳатто ба хатогиҳои ҳисоби компютерӣ воқуниш нишон медиҳад. Ҳалли дурусти чунин системаҳо дар компютерҳо бинобар хатогии калони ҳисоббарорӣ қафолат дода намешавад.

Адабиёт

1. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем / В.И. Идельчик. – Изд. 2. – М.: Издательской группы URSS, 2022. – 288 с.

2. Электрические системы и сети: учебник для вузов / В.И. Идельчик. – М.: Издательской группы URSS, 2022. – 600 с.

3. Электрические системы и сети в примерах и иллюстрациях: учебное пособие для электроэнерг. спец. / В.В. Ежков, Г.К. Зарудский, Э.Н. Зуев и др.; Под ред. В.А. Строева. – М.: Высшая школа, 1999. – 352 с.

4. Джуразода Ш.Ч., Назиров Х.Б., Ганиев З.С., Ишан-Ходжаев Р.С. Математические задачи энергетики: Учебно-методический комплекс – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2026. – 140 с.