# Лекція 14. Нелінійне програмування

## 14.1. Класичні умови екстремуму задачі нелінійного програмування

Загальна задача нелінійного програмування полягає в знаходженні екстремуму показника ефективності:

$$W = \left(x_1,\dots,x_n\right) \to \underset{x_j\in\mathbb{R},\ \ j=\overline{1,n}}{extrem} \qquad (14.1)$$

на множині планів задачі, яка задається системою умов

$$g_i\left(x_1,\dots,x_n\right)\left\{\le = \ge\right\} b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad (14.2)$$

де умова дискретності змінних та їх знаку теж враховується за допомогою функцій $g_i\left(x_1,\dots,x_n\right)$. Підкреслимо, що функції $g_i\left(x_1,\dots,x_n\right)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ та показник ефективності $W\left(x_1,\dots,x_n\right)$ усі або частково є нелінійними.

До специфічних властивостей задачі нелінійного програмування слід віднести:

1) багатоекстремальність;
2) оптимальний план (план, на якому досягається, наприклад, глобальний максимум) може бути як внутрішньою, так і граничною точкою області допустимих розв'язків;
3) область допустимих розв'язків(ОДР) може не бути опуклою та зв'язаною, тобто, складається з декількох частин, що не перетинаються (рис.14.1);
4) показник ефективності та обмеження можуть мати кутові точки та розриви.

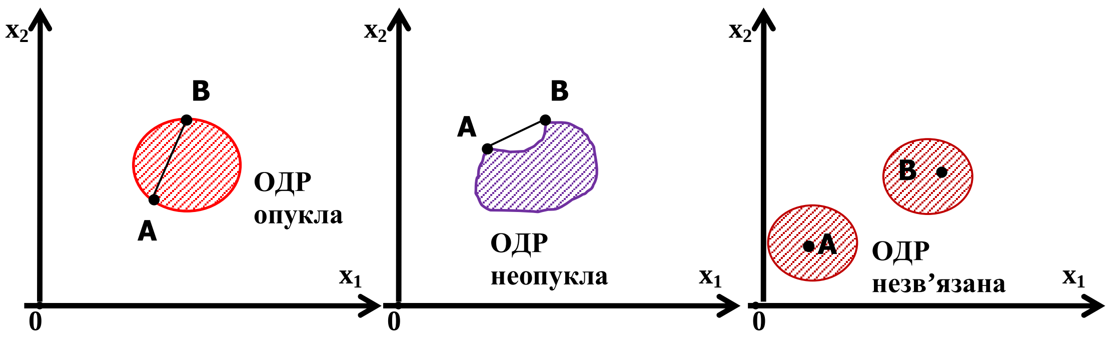



Рис.14.1. Графічне пояснення щодо особливостей ОДР

Класична детермінована задача пошуку екстремуму, тобто максимуму або мінімуму деякої неперервної та кусково-диференційованої функції $n$ змінних ставиться наступним чином: знайти всі значення вектора $X^T=\left[x_1,\dots,x_n\right]$, при яких функція $W\left(X\right)$ досягає екстремуму, при виконанні ОДР $G$ , яка задається за допомогою обмежень у формі рівнянь,тобто у обмеженнях (14.2) існує лише $m$ обмежень-рівностей, і математично записується у вигляді:

$$W\left(X\right) \to \underset{X \in G \subset \mathbb{R}^n}{extrem}.$$

Різницю $n-m$ називають *кількістю степенів свободи* задачі нелінійного програмування, а саму задачу нелінійного програмування із умовами (обмеженнями) називають *задачею нелінійного програмування на умовний екстремум*. Розглянемо застосування методу прямої підстановки та методу множників Лагранжа для розв'язання класичної задачі нелінійного програмування на умовний екстремум.

### 14.1.1. Метод прямої підстановки

Припустимо, що

$$X^T = \left[X_k^T, X_m^T\right],$$

де $X_k^T = \left[x_1, \ldots, x_k\right]$ – $k$-вимірний вектор вільних змінних, $X_m^T = \left[x_{k+1}, \ldots, x_n\right]$ – $m$-вимірний вектор базисних змінних($k+m=n$).

Тоді розв'язуючи у явному вигляді рівняння-обмеження відносно базисних змінних $x_{k+i} = \varphi_i$, $i = \overline{i,m}$ і підставляючи їх у вираз показника ефективності, отримаємо класичну безумовну задачу нелінійного програмування:

$$W\left(x_1, \ldots, x_k, \varphi_{k+1}\left(x_1, \ldots, x_k\right), \ldots, \varphi_n\left(x_1, \ldots, x_k\right)\right) \to \underset{\left[x_1, \ldots, x_k\right] \in \mathbb{R}^k}{extrem}. \qquad (14.3)$$

Якщо $k=1$, то показник ефективності буде залежати лише від однієї змінної. Припустимо, що необхідно знайти максимум показника ефективності $W_{max}$. За визначенням, в точці $\hat{x}_1$ досягається строгий локальний максимум, якщо $W\left(\hat{x}_1\right) > W\left(\hat{x}_1 + \Delta x_1\right)$ $\forall \Delta x_1 \to 0$.

Знайдемо диференціальні умови існування $\hat{x}_1$ – точки локального максимуму. Розкладемо $W\left(x_1\right) = W\left(\hat{x}_1 + \Delta x_1\right)$ за умови $\Delta x_1 \to 0$ в ряд Тейлора в околі точки $\hat{x}_1$:

$$\Delta W\left(\hat{x}_1\right) = W\left(\hat{x}_1 + \Delta x_1\right) - W\left(\hat{x}_1\right) =$$

$$= \left.\frac{dW\left(x_1\right)}{dx_1}\right|_{x_1 = \hat{x}_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2W\left(x_1\right)}{dx_1^2}\right|_{x_1 = \hat{x}_1} \cdot \Delta x_1^2 + 0\left(\Delta x_1\right) < 0, \quad \forall \Delta x_1 \to 0.$$

Із записаного виразу отримуємо достатні умови локального максимуму функції однієї змінної:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dW\left(x_1\right)}{dx_1}\right|_{x_1=\hat{x}_1} = 0, \\ \left.\dfrac{d^2W\left(x_1\right)}{dx_1^2}\right|_{x_1=\hat{x}_1} < 0. \end{cases} \tag{14.4}$$

***Приклад 14.1.*** На космічній платформі із апаратурою системи космічного зв’язку розташовано контейнер із ядерною енергетичною установкою циліндричної форми. З метою максимізації маси ядерного пального при заданій масі контейнера необхідно виготовити контейнер максимального об’єму при заданій площі поверхні (рис.15.2).

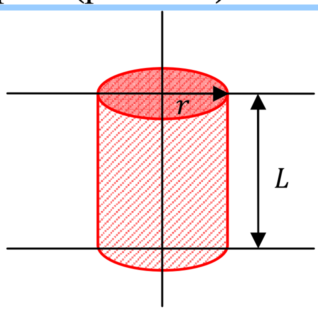



Рис. 14.2. Форма контейнера

❍Математична модель задачі:

$$\begin{cases} W\left(r,L\right) = \pi r^2 L; \\ S_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r L. \end{cases}$$

Математична постановка задачі:

$$\begin{cases} W\left(r,L\right) = \pi r^2 L \to \max\limits_{r,L}; \\ S_0 = 2\pi r^2 + 2\pi r L\ . \end{cases}$$

Розв’язання методом прямої підстановки:

$$L = \frac{1}{2\pi r}\left(S_0 - 2\pi r^2\right),$$

$$W\left(r\right) = \frac{S_0}{2} r_0 - \pi r^3.$$

Необхідна умова екстремуму:

$$\frac{dW\left(r\right)}{dr} = 0.$$

Обчислюємо похідну:

$$\frac{S_0}{2} - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r_{\max} = \sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}.$$

За фізичним змістом мінімальний об'єм $V_{min} = 0$ при $r = 0$ або $L = 0$, тобто знайдене значення $r_{\max}$ відповідає максимальному об'єму. Використаємо достатні умови для формального підтвердження цього факту:

$$\frac{d^2W(r)}{dr^2} = -6\pi r < 0, \quad r > 0.$$

Отже

$$\begin{cases} r_{max} = \hat{r} = \sqrt{\dfrac{S_0}{6\pi}}; \\ L_{max} = \sqrt{\dfrac{2S_0}{3\pi}} \end{cases} . \bullet$$

***Приклад 14.2.*** Знайти екстремум функції $W(x_1,\ x_2)$:

$$W(x_1,x_2) = \frac{1}{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + 1}.$$

❍

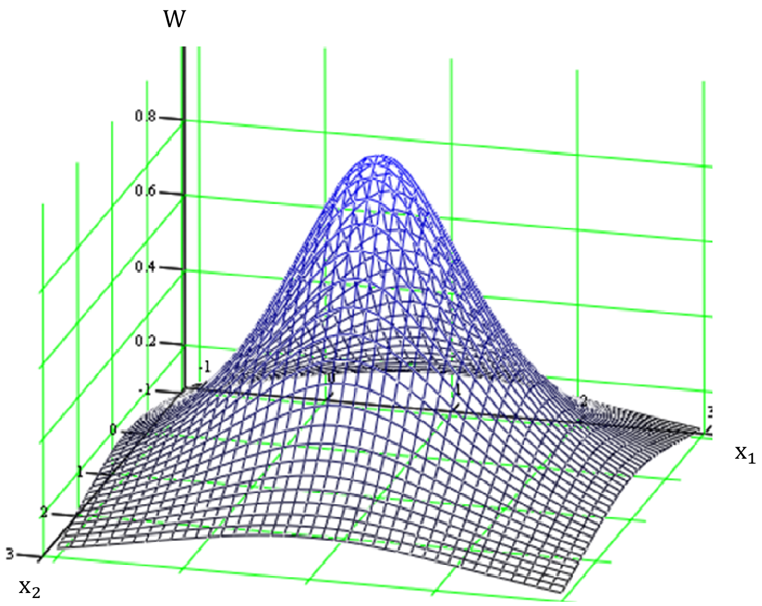



Рис. 14.3. Графічна ілюстрація щодо визначення типу екстремуму функції $W(x_1,\ x_2)$

Необхідна умова екстремуму:

$$\frac{\partial W(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{2(x_1-1)}{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + 1} = 0,$$

$$\frac{\partial W(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{2(x_2-1)}{(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + 1} = 0.$$

За геометричним змістом задачі зрозуміло, що в точці екстремуму $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1$ функція $W(x_1,\ x_2)$ приймає найбільше значення $W\left(\hat{x}_1, \hat{x}_2\right) = 1$.

Як видно з графіку(див. рис.14.3), функція $W(x_1,\ x_2)$ має єдиний екстремум, що є глобальним максимумом:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1,$$
$$W\left(\hat{x}_1, \hat{x}_2\right) = 1. \bullet$$

Покладемо $k > 1, m < n, k + m = n$, $(k = n - m -$ кількість степенів свободи) $k, n, m \in \mathbb{N}$. За означенням, $W\left(X_k\right)$ має в точці $X_k$ строгий локальний максимум, якщо $W\left(X_k\right) > W\left(\hat{X}_k + \Delta X_k\right)\ \forall \Delta x_i \to 0\ \left(i = \overline{1, k}\right), X_k^T = \left[x_1, \ldots, x_k\right]$, $\Delta X_k^T = \left[\Delta x_1, \ldots, \Delta x_k\right]$.

Розкладання в ряд Тейлора скалярної функції векторного аргументу відносно $X_k$ дає можливість обчислити приріст показника ефективності в малому околі точки максимуму цього показника ефективності, тобто $\hat{X}_k$:

$$\Delta W\left(\hat{X}_k\right) = W\left(\hat{X}_k + \Delta \hat{X}_k\right) - W\left(\hat{X}_k\right) =$$
$$= \left[\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right]_{X_k = \hat{X}_k} \cdot \Delta X_k + \frac{1}{2!} \Delta X_k^T \left[\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T\right]_{X_k = \hat{X}_k} \cdot \Delta X_k + o\left(\left\|\Delta X_k\right\|\right)$$
$$\forall \Delta X_k \to 0,$$

де $o\left(\left\|\Delta X_k\right\|\right)$ - доданки вищого порядку малості порівняно із
$\left\|\Delta X_k\right\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_k^2}$.
Виходячи з означення локального максимуму, маємо:

$$\Delta W\left(\hat{X}_k\right) < 0,\ \forall \Delta X_k \to 0,$$

$$\left.\left(\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T\right|_{X_k = \hat{X}_k} = \left[\frac{\partial W}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial X_k}\right] = 0.$$

тобто $\left.\dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right|_{X_k = \hat{X}_k}$ – градієнт показника ефективності в точці локального максимуму.

Квадратична форма

$$\frac{1}{2!}\Delta X_k^T\left[\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T\right]_{X_k=\hat{X}_k}\cdot\Delta X_k<0,\ \forall\Delta X_k\to 0, \quad (14.5)$$

побудована із використанням квадратичної симетричної матриці

$$\left[\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial X_1\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial X_1\partial X_k}\\ \frac{\partial^2 W}{\partial X_2\partial X_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial X_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial X_2\partial X_k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 W}{\partial X_k\partial X_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial X_k\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial X_k^2}\end{bmatrix}, \quad (14.6)$$

має назву *матриця Гессе*. Ця квадратична форма у випадку локального максимуму повинна буди від'ємно-визначеною, тобто:

$$\Delta X_k^T\left[\frac{\partial}{\partial X_k}\left(\frac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)\right]_{X_k=\hat{X}_k}\cdot\Delta X_k<0.$$

Квадратична форма буде від'ємно-визначеною, коли матриця Гессе задовольняє спеціальній умові. Цю матрицю Гессе, яка задовольняє умові від'ємної визначеності квадратичної форми, теж називають від'ємно-визначеною.

Ознакою від'ємної визначеності квадратичної форми, побудованої із використанням квадратної симетричної матриці

$$Q=\begin{bmatrix}q_{11} & \cdots & q_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{n1} & \cdots & q_{nn}\end{bmatrix}$$

є : усі кутові діагональні визначники матриці $Q$ непарного порядку повинні бути від'ємними, а парного – додатними, тобто,

$$q_{11}<0,$$

$$\begin{vmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix}q_{11} & q_{12} & q_{13}\\ q_{21} & q_{22} & q_{23}\\ q_{31} & q_{32} & q_{33}\end{vmatrix}<0 \text{ тощо.}$$

Якщо показник ефективності в точці $\hat{X}_k$ має мінімум, то достатня умова мінімуму має вигляд:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right|_{X_k=\hat{X}_k} = 0, \\ \Delta_k X_k^T \left.\left[\dfrac{\partial}{\partial X_k}\left(\dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T\right]\right|_{X_k=\hat{X}_k} > 0. \end{cases} \quad (14.7)$$

Ознакою додатної визначеності квадратичної форми є додатність усіх кутових визначників квадратичної симетричної матриці $Q$, на якій ця форма побудована.

***Приклад 14.3.*** Перевірити знаковизначеність квадратичної форми, заданої симетричною матрицею

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \; X_k \in \mathbb{R}^3.$$

❍ $q_1 = 1 > 0$,

$$q_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$q_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 + 1 - 2 - 1 - 3 = 2 > 0.$$

$$\left[\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} > 0 \;\; \forall \left[\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3\right]^T \in \mathbb{R}^3 \setminus \left[0,0,0\right]^T.$$

Висновок: матриця $Q$ додатно-визначена.

Якщо задану матрицю $Q$ помножити на $-1$, то отримаємо :

$$\Delta X_3^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \Delta X_3 < 0, \text{ де } \Delta X_3^T = \left[\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3\right]^T,$$

тобто отримана форма є від’ємно-визначеною.

Проілюструємо ознаку від'ємної визначеності квадратної симетричної матриці $-Q$:

$$-Q = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$q_1 = -1 < 0\,,\; q_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0\,,\; q_3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2 < 0\,.\bullet$$

***Зауваження 14.2.*** Окрема умова $\dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k} = 0$ має назву *необхідної умови екстремуму першого порядку*.

Умова

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial X_k}\left(\dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T \le 0 \end{cases}$$

має назву *необхідної умови максимуму другого порядку*. Матрицю Гессе в цьому випадку називають *від'ємно-напіввизначеною*.

*Необхідна умова мінімуму другого порядку* набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial X_k}\left(\dfrac{\partial W\left(X_k\right)}{\partial X_k}\right)^T \ge 0. \end{cases}$$

Матрицю Гессе в цьому випадку називають *додатно-напіввизначеною*.

Як бачимо, для розв'язання задачі пошуку екстремуму скалярного показника ефективності із векторним аргументом на основі записаних вище достатніх умов необхідно, щоб $W(x_1 \ldots x_k)$ мала частинні похідні до другого порядку включно за своїм аргументом, і при цьому існувала можливість отримання явного розв'язку системи обмежень, відносно базисних змінних. Але остання умова досить часто не виконується. Тому, за рахунок використання так званого принципу розширення вектору змінних та показника ефективності, було запропоновано спеціальний метод розв'язання класичної задачі нелінійного програмування на умовний екстремум, який отримав назву *метод множників Лагранжа* .

### 14.1.2. Метод множників Лагранжа

Метод множників Лагранжа полягає в тому, що класичну задачу нелінійного програмування на умовний екстремум з обмеженнями-рівностями замінюють спрощеною умовною задачею із розширеним вектором змінних $\left[X^T, \Lambda^T\right]^T$ де $X^T = [x_1,...,x_n]$ – вихідній вектор змінних, $\Lambda^T = [\lambda_1,...,\lambda_m]$ – вектор додаткових змінних, який називають *вектором множників Лагранжа*, а також із розширеним показником ефективності

$$L\left(X,\Lambda\right) = W\left(X\right) + \Lambda^T (B - G(X)). \tag{14.8}$$

Таким чином можна записати розширений показник ефективності

$$L\left(X,\Lambda\right) = W(x_1,\dots,x_k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1,\dots,x_n)) \tag{14.9}$$

який називають *функцією Лагранжа* або *лагранжіаном*.

Необхідна умова екстремуму в розширеній задачі нелінійного програмування має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial X} = \dfrac{\partial W\left(X\right)}{\partial X} + \left(-\dfrac{\partial G^T\left(X\right)}{\partial X}\right)\Lambda = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dfrac{\partial W\left(X\right)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i\left(X\right)}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \\ \dfrac{\partial L\left(X,\Lambda\right)}{\partial \Lambda} = B - G\left(X\right) = 0 \Leftrightarrow b_i - g_i\left(X\right) = 0 \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases} \tag{14.10}$$

Після обчислення розв’язків записаної системи рівнянь знаходимо точки екстремумів. В залежності від умови задачі виділяємо точки, в яких показник ефективності $W(\hat{X})$ досягає максимуму або мінімуму і, в подальшому, виконуємо пошук глобального максимуму або мінімуму. В багатьох практичних випадках із фізичного змісту задачі зрозуміло, в якій точці досягається найбільше або найменше значення показника ефективності із урахуванням обмежень.

***Приклад 14.4.*** Розв’яжемо приклад 14.1, використовуючи метод множників Лагранжа.

❍Запишемо функцію Лагранжа

$$L\left(r,l,\lambda\right) = \pi r^2 l + \lambda(S_0 - 2\pi r^2 - 2\pi r l).$$

Необхідна умова набуває вигляду :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = 2\pi rl + \lambda\left(-4\pi r - 2\pi l\right) = 0, & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial l} = \pi r^2 + \lambda\left(-2\pi r\right) = 0, & (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = S_0 - 2\pi r^2 - 2\pi rl = 0; & (3) \end{cases}$$

Розв‘язання задачі (1) – (3):

$$\left(2\right) :\to \ \ \lambda = \frac{r}{2},$$

$$\left(1\right) :\to rl - 2r^2 = 0 \to \left[ \begin{array}{l} r = \dfrac{l}{2}; \\ r = 0 - \text{не задовольняє фізичному змісту.} \end{array} \right.$$

$$\left(3\right) :\to S_0 - 6\pi r^2 = 0 \to r_{max} = \sqrt{\frac{S_0}{6\pi}};$$

$$l_{max} = \sqrt{\frac{2S_0}{3\pi}};$$

$$\lambda_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}. \bullet$$

Розглянемо на прикладі двовимірної задачі лінійного програмування фізичний (економічний) зміст множників Лагранжа:

$$\begin{cases} W\left(x_1 x_2\right) \to max; \\ g\left(x_1 x_2\right) = b. \end{cases}$$

Припустимо, що умовний максимум досягається в точці $\hat{X}^T = [\hat{x}_1, \ \hat{x}_2]$. Розглядаючи залежність $\hat{X}$ від зміни параметра $b$, отримаємо залежності:

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1(b), \hat{x}_2 = \hat{x}_2(b),$$

$$W_{\max} = W\left(\hat{x}_1\left(b\right), \ \hat{x}_2\left(b\right)\right).$$

Знайдемо похідну від оптимального значення показника ефективності по параметру $b$:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial b} = \frac{\partial W}{\partial \hat{x}_1}\cdot\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial \hat{x}_2}\cdot\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial b},$$

А також похідну по параметру $b$ від обох частин обмеження-рівності:

$$\frac{\partial g}{\partial \hat{x}_1}\cdot\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial \hat{x}_2}\cdot\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial b} = 1.$$

Виходячи з того, що в заданій задачі нелінійного лінійного програмування функція Лагранжа (14.9) має вигляд:

$$L\left(x_1,x_2,\lambda\right)=W\left(x_1,x_2\right)+\lambda\left(b-g\left(x_1,x_2\right)\right),$$

знаходимо частинні похідні в оптимальній точці:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial \hat{x}_1}=\dfrac{\partial W}{\partial \hat{x}_1}-\hat{\lambda}\dfrac{\partial g}{\partial \hat{x}_1}=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \hat{x}_2}=\dfrac{\partial W}{\partial \hat{x}_2}-\hat{\lambda}\dfrac{\partial g}{\partial \hat{x}_2}=0.\end{cases}$$

Підставляючи частинні похідні у вираз для обчислення похідної для оптимального значення показника ефективності, отримаємо:

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial b}=\frac{\hat{\lambda}\partial g}{\partial \hat{x}_1}\cdot\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial b}+\frac{\hat{\lambda}\partial g}{\partial \hat{x}_2}\cdot\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial b}=\hat{\lambda}\left(\frac{\partial g}{\partial \hat{x}_1}\cdot\frac{\partial \hat{x}_1}{\partial b}+\frac{\partial g}{\partial \hat{x}_2}\cdot\frac{\partial \hat{x}_2}{\partial b}\right)=\hat{\lambda}.$$

Узагальнюючи отриманий результат на випадок $n$-мірного вектора $X$ та на випадок дії $m$ обмежень $\left(m<n\right)$, отримаємо:

$$\left.\frac{\partial \hat{W}}{\partial b_i}\right|_{\substack{X=\hat{X}\\ \Lambda=\hat{\Lambda}}}=\hat{\lambda}_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right). \tag{14.11}$$

**Фізичний (економічний) зміст.**

Вважаючи, що $W(X)$– прибуток і при цьому виконується максимізація показника ефективності, або $W(X)$– вартість (витрати) виробництва і при цьому виконується мінімізація показника ефективності, за умови, що $b_i$ – об'єм $i$-го ресурсу, робимо висновок про те, що $i$-й множник Лагранжа показує на скільки зміниться максимальний прибуток або мінімальна вартість виробництва при зміні $i$-го ресурсу на $1$.

***Зауваження 14.3.*** В більшості задач, присвячених системним дослідженням складних технічних систем спеціально виділяють вектор стану, який можливо інтерпретувати як вектор базисних змінних.

*Одноетапною процедурою прийняття рішення із обмеженнями* у формі рівнянь називається результат розв'язання задачі нелінійного програмування, поставленої у вигляді:

$$\begin{cases}W(X,U)\to \max\limits_{X\in\mathbb{R}^n,U\in\mathbb{R}^m} \quad (\min),\\ F\left(X,U\right)=0.\end{cases} \tag{14.12}$$

де $X$– $n$-вимірний вектор, $U$– $m$-вимірний вектор, $W\left(X,U\right): R^n\times R^m\to R$– скалярний показник ефективності, $F\left(X,U\right): R^n\times R^m\to R^n$ $-n$- вимірна векторна функція, $F^T\left(X,U\right)=[f_1\left(X,U\right),\ldots,f_n(X,U)]$.

Необхідні умови для пошуку оптимального розв'язку мають вигляд:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial X}\right|_{\substack{X=\hat{X}\\ U=\hat{U}\\ \Lambda=\hat{\Lambda}}} = \dfrac{\partial W\left(X,U\right)}{\partial X} + \dfrac{\partial}{\partial X} F^T\left(X,U\right)\Lambda\Big|_{\substack{X=\hat{X}\\ U=\hat{U}\\ \Lambda=\hat{\Lambda}}} = 0; \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial U}\right|_{\substack{X=\hat{X}\\ U=\hat{U}\\ \Lambda=\hat{\Lambda}}} = \dfrac{\partial W\left(X,U\right)}{\partial U} + \dfrac{\partial}{\partial U} F^T\left(X,U\right)\Lambda\Big|_{\substack{X=\hat{X}\\ U=\hat{U}\\ \Lambda=\hat{\Lambda}}} = 0; \\ F\left(\hat{X},\hat{U}\right) = 0, \end{cases} \tag{14.13}$$

де $L = L\left(X,U,\Lambda\right) = W\left(X,U\right) + \Lambda^T \cdot F\left(X,U\right)$, $\Lambda^T = [\lambda_1,\ldots,\lambda_m]$– множник Лагранжа.

***Приклад 14.5.*** Дано:

$$W\left(x_1,x_2\right) = \frac{1}{\left(x_1-1\right)^2 + \left(x_2-1\right)^2 + 1}.$$

1) Знайти точку екстремуму та із використанням матриці Гессе з'ясувати тип екстремуму.
2) Розв'язати задачу

$$\begin{cases} W\left(x_1,x_2\right) \to \max(\min); \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

застосовуючи метод множників Лагранжа.

❍1) Враховуючи результат розв'язання прикладу 15.2 маємо $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1$, $W\left(\hat{x}_1,\hat{x}_2\right) = 1$. Тоді в точці екстремуму матриця Гессе та її діагональні визначники набувають вигляду:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ q_1 = -2 < 0\ ,\ q_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Отже, квадратична форма від'ємно визначена, тобто $(1;1)$– точка максимуму.

2) Побудуємо лагранжіан:

$$L\left(x_1,x_2,\lambda\right) = W\left(x_1,x_2\right) + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

та скористаємося необхідною умовою екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

В результаті отримаємо

$$\left[ \begin{aligned} & x_{11} = x_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ & x_{21} = x_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \right.$$

За геометричним змістом задачі зрозуміло, що

$$\left[ \begin{aligned} & x_{1\min} = x_{2\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ & x_{1\max} = x_{2\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \right.$$

$$W_{min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)^2 + 1},$$

$$W_{\max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2 + 1}. \bullet$$

### 14.4. Постановка задачі нелінійного програмування в умовах невід'ємності змінних

У випадку найпростішої задачі нелінійного програмування із усіх обмежень загальної задачі нелінійного програмування залишається лише вимога невід'ємності змінних:

$$W(X) \to \max_{X \geq 0}. \tag{14.14}$$

На прикладі скалярного показника ефективності, що залежить від двох змінних, розглянемо умови існування його максимуму при невід'ємності змінних.

Припустимо:

$$W = W\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{\left(x_1 - a\right)^2 + \left(x_2 - b\right)^2 + 1}.$$

Будемо позначати $x_{1\max}$, $x_{2\max}$ точки максимуму $W\left(x_1, x_2\right)$, коли обмежень немає, $x_{1,2} \in R$, $x_{1\max} = a$, $x_{2\max} = b$ (див. рис.14.1).

Будемо позначати $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ координати точки максимуму $W\left(x_1, x_2\right)$ в умовах, коли $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (рис.16.1).

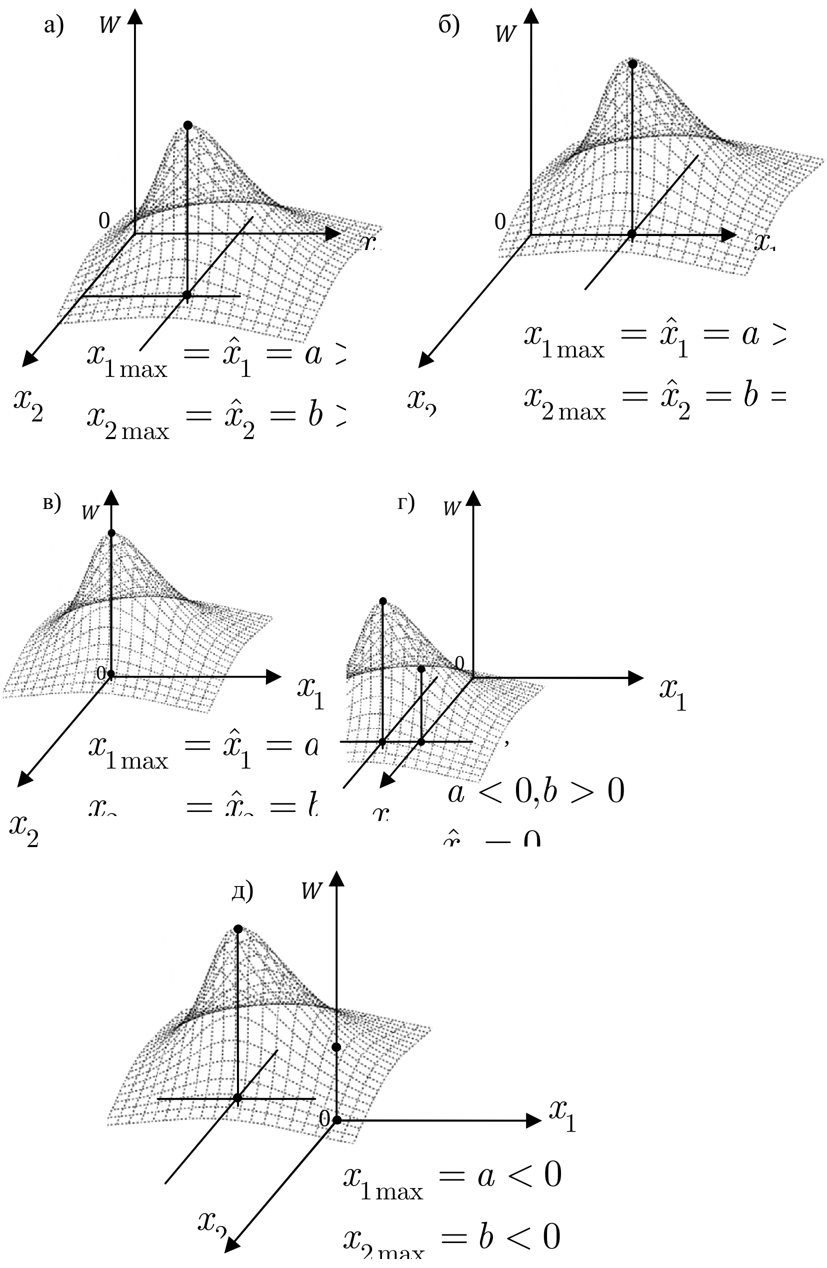



Рис. 14.4. Графічна ілюстрація стосовно пошуку необхідних умов існування найбільшого значення показника ефективності у точці $\hat{x}_{1,2}$, представленого у вигляді унімодальної двовимірної функції в умовах дії найпростіших обмежень $x_{1,2} \geq 0$: для а), б), в) виконується умова $\dfrac{\partial W}{\partial x_i} = 0, i = 1,2;$ для г) і д) відповідно $\dfrac{\partial W}{\partial x_1} < 0, \dfrac{\partial W}{\partial x_2} = 0;$ $\quad \dfrac{\partial W}{\partial x_1} < 0, \dfrac{\partial W}{\partial x_2} < 0.$

**Висновок** щодо необхідної умови існування максимуму:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial W}{\partial x_1}\right|_{x_1=\hat{x}_1} \le 0 \ ; \\ \left.\dfrac{\partial W}{\partial x_2}\right|_{x_2=\hat{x}_2} \le 0; \\ \hat{x}_1 \ge 0; \\ \hat{x}_2 \ge 0; \\ \left.\dfrac{\partial W}{\partial x_1}\right|_{x_1=\hat{x}_1} \cdot \hat{x}_1 = 0; \\ \left.\dfrac{\partial W}{\partial x_2}\right|_{x_2=\hat{x}_2} \cdot \hat{x}_2 = 0, \end{cases} \to \begin{cases} \left.\dfrac{\partial W(X)}{\partial X}\right|_{X=\hat{X}} \le 0; \\ \hat{X} \ge 0 \ ; \\ \left(\left.\dfrac{\partial W}{\partial X}\right|_{X=\hat{X}}\right)^T \cdot \hat{X} = 0, \end{cases}$$

де $X^T = \left[x_1, x_2\right]$.

Якщо замість $W\left(x_1, x_2\right)$ із одним максимумом використовується показник ефективності із декількома максимумами (як кажуть, багатомодова функція), то записана умова зберігається і використовується як необхідна умова перевірки існування локального максимуму в умовах найпростіших обмежень-нерівностей (всі координати невід’ємні).

Для $n$-вимірного випадку, тобто коли $X^T = \left[x_1, \ldots, x_n\right]$, можливо отримати строго аналітично ті ж самі співвідношення, що і для розглянутого двовимірного прикладу, як необхідну умову існування локального максимуму, якщо скористатись розкладанням у ряд Тейлора показника ефективності поблизу точки $\hat{X}$ і виконати вимогу

$$\begin{cases} \Delta W\left(\hat{X}\right) = W\left(\hat{X} + \Delta X\right) - W\left(\hat{X}\right) \le 0 \quad \forall \Delta X \to 0_n; \\ X \ge 0_n. \end{cases}$$

Ці необхідні вимоги існування локального максимуму в $n$-вимірному випадку запишемо у вигляді:

1) якщо $\hat{x}_j = 0$, то $\left.\dfrac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{x=\hat{x}_j} \le 0;$

2) якщо $\hat{x}_j > 0$, то $\left.\dfrac{\partial W}{\partial x_j}\right|_{x=\hat{x}_j} = 0.$

***Зауваження 14.4.*** В умовах 1), 2) $j$ може приймати будь-яке значення від 1 до $n$ як окремо, так і по групі координат.

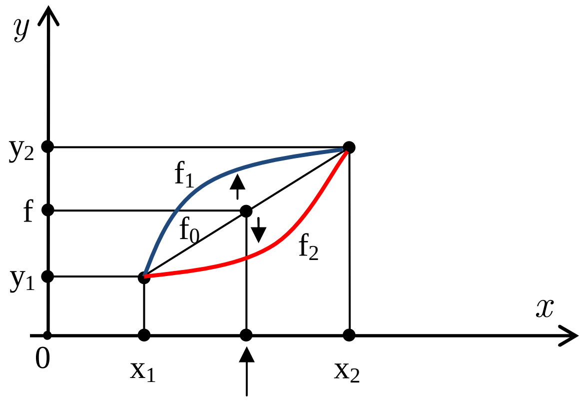
***Зауваження 14.5.*** У випадку опуклої догори функції $W(X)$ для будь-якого $X \in \mathbb{R}^n$ отримаємо достатню умову існування глобального максимуму при $X \geq 0$ у тому ж самому вигляді, який було записано вище у пунктах 1) та 2).

***Зауваження 14.6.*** Визначення опуклості функції (рис. 14.5):
Для векторного аргументу вважаємо функцію опуклою догори та донизу відповідно

$$f_1(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) > \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2),$$

$$f_2(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) < \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2),$$

де $\lambda$ – скаляр.




$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

$f_0(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ – пряма

$f_1(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ – опукла догори

$f_2(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ – опукла донизу

Рис. 14.5. Графічна ілюстрація стосовно визначення характеру опуклості двовимірної функції

***Приклад 14.6.*** Розв'язати графічно:

$$1) \begin{cases} W(x_1\ \ x_2) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 8)^2 \underset{x_{1,2} \geq 0}{\to \max(\min)}; \\ x_1 + 2x_2 \geq 4; \\ \dfrac{5}{2} x_1 + 2x_2 \leq 20, \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} W\left(x_1 \;\; x_2\right) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 \to \underset{x_{1,2}\ge 0}{\max\left(\min\right)}; \\ x_1 \le 10; \\ x_2 \le 9; \\ x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 \le \dfrac{15}{2}; \\ x_1 \cdot x_2 \le 6, \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} W\left(x_1 \;\; x_2\right) = x_2 - x_1^2 + 4x_1 \to \underset{x_{1,2}\ge 0}{\max}; \\ x_1 \cdot x_2 \ge 6 \;; \\ x_1^2 + x_2^2 \le 49; \\ x_2 \le 6. \end{cases}$$

❍Методичні вказівки стосовно розв'язання задач:
1)

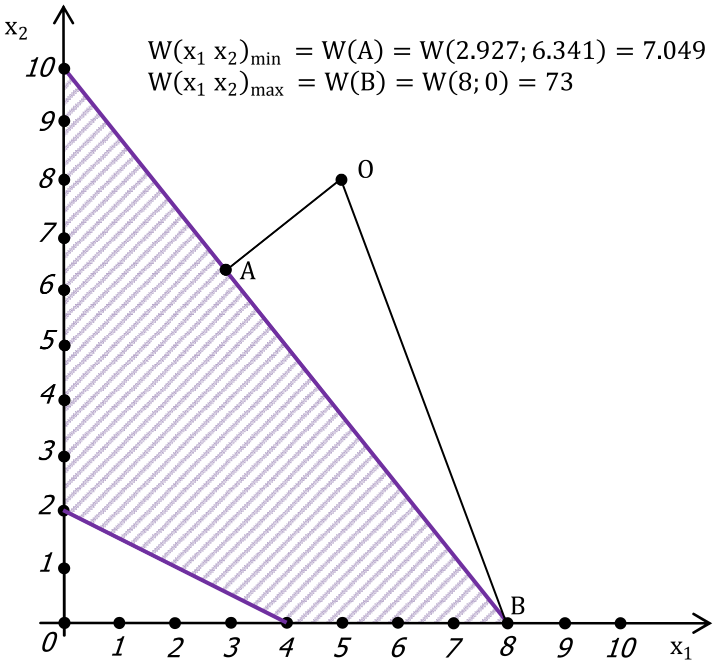



Рис. 14.6. Графічна ілюстрація щодо розв'язання задачі 1)

2)

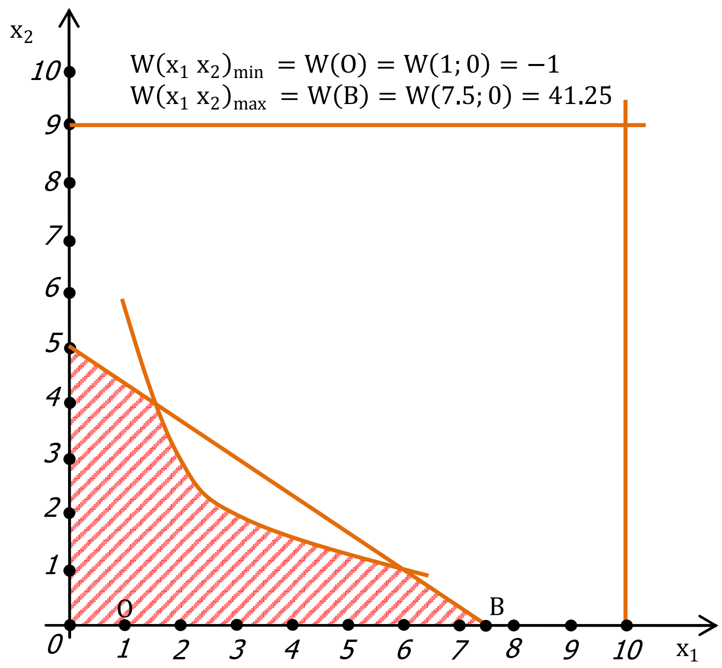



Рис.14.7. Графічне розв'язання задачі 2)

3)

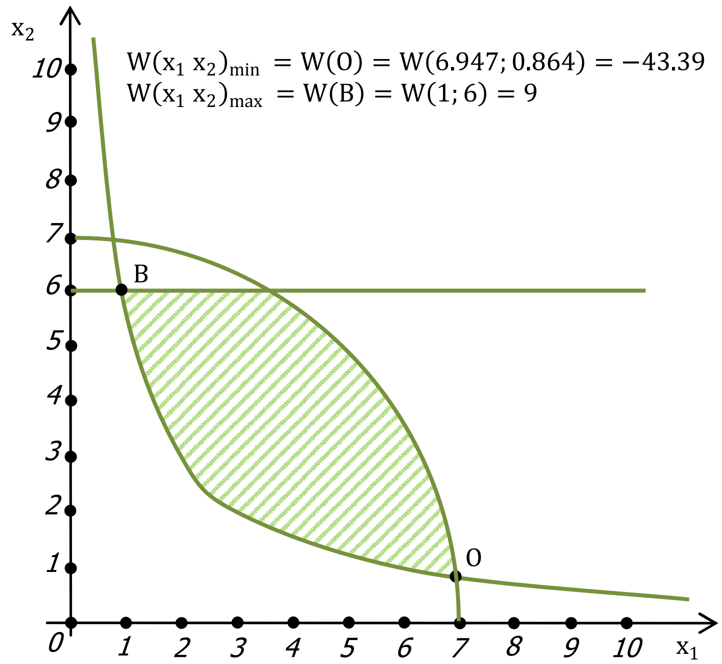



Рис. 14.8. Графічне розв'язання задачі 3)

●

***Приклад 14.7.*** Телекомунікаційна компанія надає користувачам послуги супутникового зв'язку $(i = 1)$ та безпроводового доступу до інтернету $(i = 2)$.

Знижка витрат на одиницю послуги при зростанні кількості користувачів обчислюються за формулою:

$\Delta V_i = l_i \cdot x_i$,

де $x_i$ – об’єм послуги $i$-го виду (кількість користувачів даної послуги);

$V_i$ – витрати фірми на реалізацію $i$-го виду послуги при мінімальній сумарній кількості користувачів обох послуг;

$l_i$ – коефіцієнти знижок питомих витрат при зростанні кількості користувачів.

Необхідно з’ясувати об‘єм послуг кожного виду, при якому забезпечується мінімізація сумарних витрат при виконанні наступних обмежень:

– мінімальна сумарна кількість користувачів: 40;

– техніко-технологічній ресурс двох видів послуг складає відповідно: 160 одиниць; 210 одиниць;

– норми витрат першого ресурсу на обслуговування одного користувача супутникового зв`язку дорівнюють $2$, а користувача безпроводового доступу до інтернету - $2{,}67$;

– норми витрат другого ресурсу складають відповідно $3$ і $2$.

Необхідно побудувати математичну модель задачі, виконати математичну постановку задачі і розв‘язати її графічним методом, якщо:

$V_1 = 100$ у.о., $V_2 = 140$ у.о., $l_1 = l_2 = 1$ у.о. на одного користувача.

❍ 1. Математична модель:

$$\begin{cases} W\left(x_1, x_2\right) = \left(100 - x_1\right)x_1 + \left(140 - x_2\right)x_2; \\ x_1 + x_2 \geq 40; \\ 2x_1 + 2.67x_2 \leq 160; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 210; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

2. Математична постановка:

$$W(x_1, x_2) \to \min_{x_{1,2} \in G},$$

$$\left(x_1 - 50\right)^2 + \left(x_2 - 70\right)^2 = 50^2 + 70^2 - W$$

де ОДР $G$ задається обмеженнями-нерівностями:

$$\begin{cases} x_2 \geq -x_1 + 40; \\ x_2 \leq \dfrac{160 - 2x_1}{2,67}; \\ x_2 \leq -\dfrac{3}{2}x_1 + 105; \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

3. Графічний розв'язок (рис. 14.9).

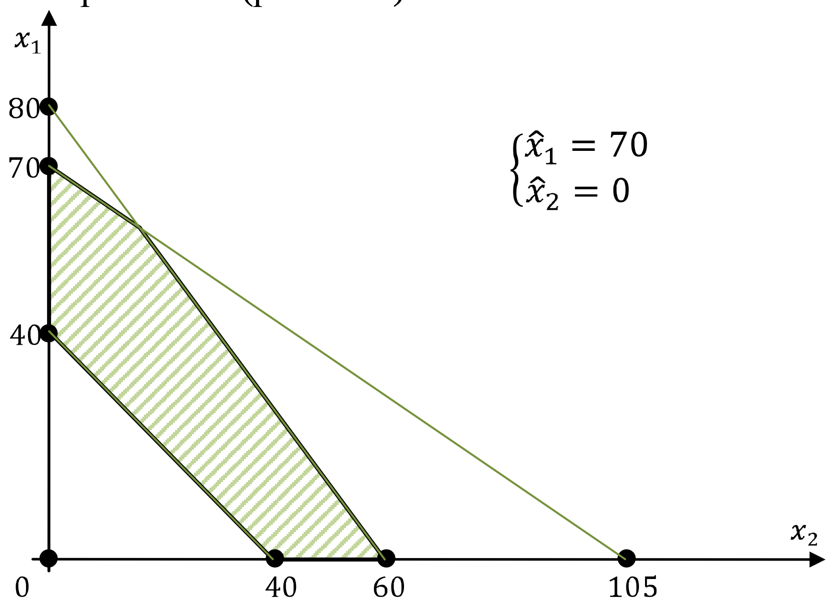



Рис. 14.9. Графічна ілюстрація побудови області допустимих значень

Як бачимо

$$\left(x_1 - 50\right)^2 + \left(x_2 - 70\right)^2 = 50^2 + 70^2 - W = R^2,$$

тобто графічним образом виразу, який пов'язаний із показником ефективності $W$, є коло радіусу $R^2 = 50^2 + 70^2 - W$.

Чим меньше $W$, тим більше $R$. Найбільше значення $R$ досягається у точці

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = 70, \\ \hat{x}_2 = 0. \end{cases}$$

Отже результат розв'язання сформульованої вище задачі нелінійного програмування в умовах дії обмежен-нерівностей, дозволяє зробити висновок про те, що надання послуг супутникового зв'язку економічно вигідніше, ніж безпроводового доступу до інтернету. Мінімальні витрати на обслуговування $W_{\min} = 2100$ у.о.●