

мих розв'язків. Після цього відбувається повернення до першого етапу і знову виконується розв'язання задачі лінійного програмування симплекс методом, але із урахуванням нового обмеження. Якщо новий розв'язок теж не є цілочисельним, то відбувається перехід до другого етапу і до складу обмеження включається ще одне додаткове обмеження і виконується повернення до першого етапу.

Вихід з двохетاپної процедури відбувається тоді, коли буде знайдено цілочисельний розв'язок, що належить області допустимих розв'язків.

Для з'ясування специфічних особливостей методу Гоморі, розглянемо його геометричний образ (рис.13.1).

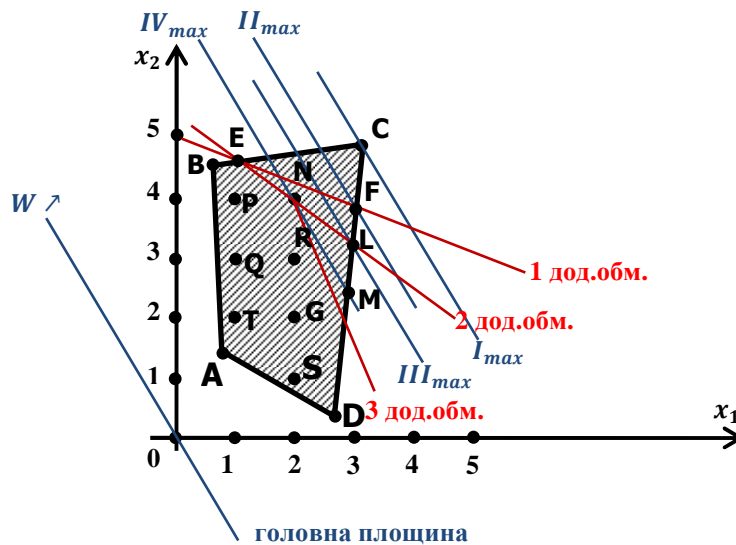


Рис. 14.1. Геометричний образ ідеї методу Гоморі

Означення 13.2. *Послабленою цілочисельною задачею лінійного програмування* називають задачу, у якій знято обмеження на цілочисельність.

Для послабленої цілочисельної задачі лінійного програмування (або просто задачі лінійного програмування) максимум досягається в точці C , але x_2 не є цілим. Точка C (дробовий розв'язок) відсікається додатковим обмеженням EF (перше додаткове обмеження), зберігаючи область допустимих рішень цілочисельної задачі лінійного програмування (точки P, N, Q, R, T, G, S).

Будуємо додаткове обмеження 1 та переходимо до послабленої задачі що досягає максимуму в точці F , і при цьому оптимальне значення x_1 буде дробовим. Будуємо додаткове обмеження 2 (ENL) та переходимо до максимуму показника ефективності задачі лінійного програмування в точку L , в якій знову оптимальні x_1, x_2 – дробові. Будуємо додаткове обмеження 3, яке в послабленій задачі лінійного програмування дає кутову точку N , в якій оптимальні x_1, x_2 є цілочисельними і додатними. Вважаємо, що цілочисельна задача лінійного програмування розв'язана.

Як бачимо, додаткові обмеження кожного разу відтинали від області допустимих розв'язків послабленої цілочисельної задачі лінійного програмування (тобто області допустимих розв'язків задачі лінійного програмування) дробові розв'язки і зберігали область допустимих розв'язків цілочисельної задачі лінійного програмування.

Критерієм побудови "правильного" додаткового обмеження є те, що воно повинно відтинати оптимальну нецілочисельну точку і залишати незайманими усі цілочисельні точки вихідної цілочисельної задачі лінійного програмування.

Приклад 13.1.

Розв'язати цілочисельну задачу лінійного програмування методом Гоморі:

$$\begin{cases} W = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max_{x_{1,2,3} \in \mathbb{N}_0}; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20, \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \leq 40. \end{cases}$$

○ **Перший етап.** Сформулюємо послаблену цілочисельну задачу лінійного програмування у вигляді основної задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} -W = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min_{x_{1,2,3,4,5} \geq 0}; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 = 20, \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 0x_4 + x_5 = 40. \end{cases}$$

За допомогою функції **linprog** системи комп'ютерної математики MATLAB знайдемо оптимальний розв'язок:

```
>> f=[-2;-4;-3;0;0]
f =
    -2
    -4
    -3
     0
     0
>> A=[2 3 1 1 0
      9 7 10 0 1]
A = 2 3 1 1 0
    9 7 10 0 1
>> b=[20;40]
b = 20
    40
>> lb=[0;0;0;0;0]
lb = 0
     0
     0
     0
     0
>> [X,W]=linprog(f,[],[],A,b,lb,[])
```

Optimization terminated successfully.

X = 0.0000

5.7143

0.0000

2.8571

0.0000

W = -22.8571

Висновок: серед базисних змінних x_1, x_2, x_3 є дробовий розв'язок x_2 . Тому цей розв'язок не можна вважати оптимальним розв'язком вихідної цілочисельної задачі лінійного програмування.

Другий етап. Виконаємо побудову першого додаткового обмеження:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{40}{7} - \left(\frac{9}{7}x_1 + \frac{10}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_5 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_2 &= \left[\frac{40}{7} \right] + \left\{ \frac{40}{7} \right\} - \left(\left(\left[\frac{9}{7} \right] + \left\{ \frac{9}{7} \right\} \right) x_1 + \left(\left[\frac{10}{7} \right] + \left\{ \frac{10}{7} \right\} \right) x_3 + \left(\left[\frac{1}{7} \right] + \left\{ \frac{1}{7} \right\} \right) x_5 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow - \left\{ \frac{40}{7} \right\} + \left\{ \frac{9}{7} \right\} x_1 + \left\{ \frac{10}{7} \right\} x_3 + \left\{ \frac{1}{7} \right\} x_5 &= \left[\frac{40}{7} \right] - \left(\left[\frac{9}{7} \right] x_1 + \left[\frac{10}{7} \right] x_3 + \left[\frac{1}{7} \right] x_5 \right) - x_2 \end{aligned}$$

Якщо $x_{1,2,3}$ та $x_{4,5}$ цілі, то і права частина записаного вище рівняння – ціле число. Тоді і ліва частина останнього рівняння теж буде цілим числом: $-\frac{5}{7} + \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_5 = x_6$, яке задовольняє нерівності $x_6 \geq -\frac{5}{7}$, x_6 – ціле невід'ємне число, $x_6 \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Нагадаємо, що $x_{1,2,3,4,5}$ невід'ємні.

Записане означає, що додаткове обмеження у вигляді нової змінної x_6 , не обмежено нічим, окрім загальної вимоги до невід'ємності та цілочисельності. З цього випливає, що нове обмеження може вплинути на дробовий розв'язок задачі лінійного програмування, залишивши цілочисельні незмінними.

Сформулюємо на прикладі x_6 правило побудови додаткового обмеження:

$$\left(\frac{9}{7} - \left[\frac{9}{7} \right] \right) x_1 + \left(\frac{10}{7} - \left[\frac{10}{7} \right] \right) x_3 + 0x_4 + \left(\frac{1}{7} - \left[\frac{1}{7} \right] \right) x_5 - x_6 = \frac{40}{7} - \left[\frac{40}{7} \right].$$

Послаблену цілочисельну задачу лінійного програмування із додатковим обмеженням розв'язуємо із використанням функції **linprog**:

```
>> f=[-2;-4;-3;0;0;0]
```

```
f = -2
```

```
-4
```

```
-3
```

```
0
```

```
0
```

```
0
```

```
>> A=[2 3 1 1 0 0]
```

```

    9 7 10 0 1 0
    2/7 0 3/7 0 1/7 -1]
A = 2.0000  3.0000  1.0000  1.0000  0  0
    9.0000  7.0000  10.0000  0  1.0000  0
    0.2857  0  0.4286  0  0.1429  -1.0000
>> b=[20;40;5/7]
b = 20.0000
    40.0000
    0.7143
>> lb=[0;0;0;0;0;0]
lb = 0
    0
    0
    0
    0
    0
>> [X,W]=linprog(f,[],[],A,b,lb,[])
Optimization terminated successfully.
X =
    0.0000
    5.0000
    0.0000
    5.0000
    5.0000
    0.0000
W = -20.0000.

```

Висновок: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $W = 20$ - оптимальний цілочисельний розв'язок цілочисельної задачі лінійного програмування. ●

13.3. Метод гілок та границь розв'язання цілочисельної задачі лінійного програмування

Ідея методу та прийоми його застосування полягають в тому, що спочатку в області допустимих розв'язків системи обмежень знаходять оптимальний розв'язок послабленої цілочисельної задачі лінійного програмування із використанням, наприклад, симплекс-методу. Для визначеності покладемо, що відбувається пошук максимуму показника ефективності. Якщо в отриманому розв'язку деякі базисні змінні є дробами, то обираємо будь-яку із цих змінних і будемо два обмеження: в одному обмежена величина змінної менше або дорівнює розв'язку задачі лінійного програмування округленому до найближчого цілого числа знизу; а, в іншому, обмежена величина змінної більше або дорівнює розв'язку задачі лінійного програмування округленому до найближчого цілого числа зверху. Наприклад, при побудові додаткового обмеження за де-

якою i -ою змінною $x_i = \frac{9}{2} \in [4; 5]$, перше обмеження набуває вигляду $x_i \leq 4$, а друге обмеження набуває вигляду $5 \leq x_i$.

Першим та другим додатковим обмеженням виключаємо з області допустимих розв'язків вихідної цілочисельної задачі лінійного програмування проміжок $(4; 5)$ із дробовими значеннями невідомої x_i . Цей проміжок поділяє область допустимих розв'язків на дві частини ОДР₁ та ОДР₂, де нова ОДР₁ отримана завдяки врахуванню в обмеженні вихідної задачі додаткового обмеження $x_i \leq 4$, а ОДР₂ – врахуванням обмеження $5 \leq x_i$.

В результаті такого розподілу області допустимих значень отримуємо дві нові задачі (підзадачі) лінійного програмування. Якщо після їх розв'язання отримуємо значення невідомих, які знову не є цілочисельними, то обираємо для продовження обчислень, що наближає до цілочисельного розв'язку ту підзадачу, у якій значення показника ефективності більше і знову повторюємо процедуру формування додаткових обмежень і пов'язаних з ними підзадач. Графічно-образне сприйняття процесу наближення до цілочисельного оптимального розв'язку і дало назву методу "гілок і границь".

Приклад 13.2. Для ОДР₁ цілочисельної задачі лінійного програмування (ЦЗЛП) необхідно знайти максимум показника ефективності W_{max} .

○ Побудуємо схему.

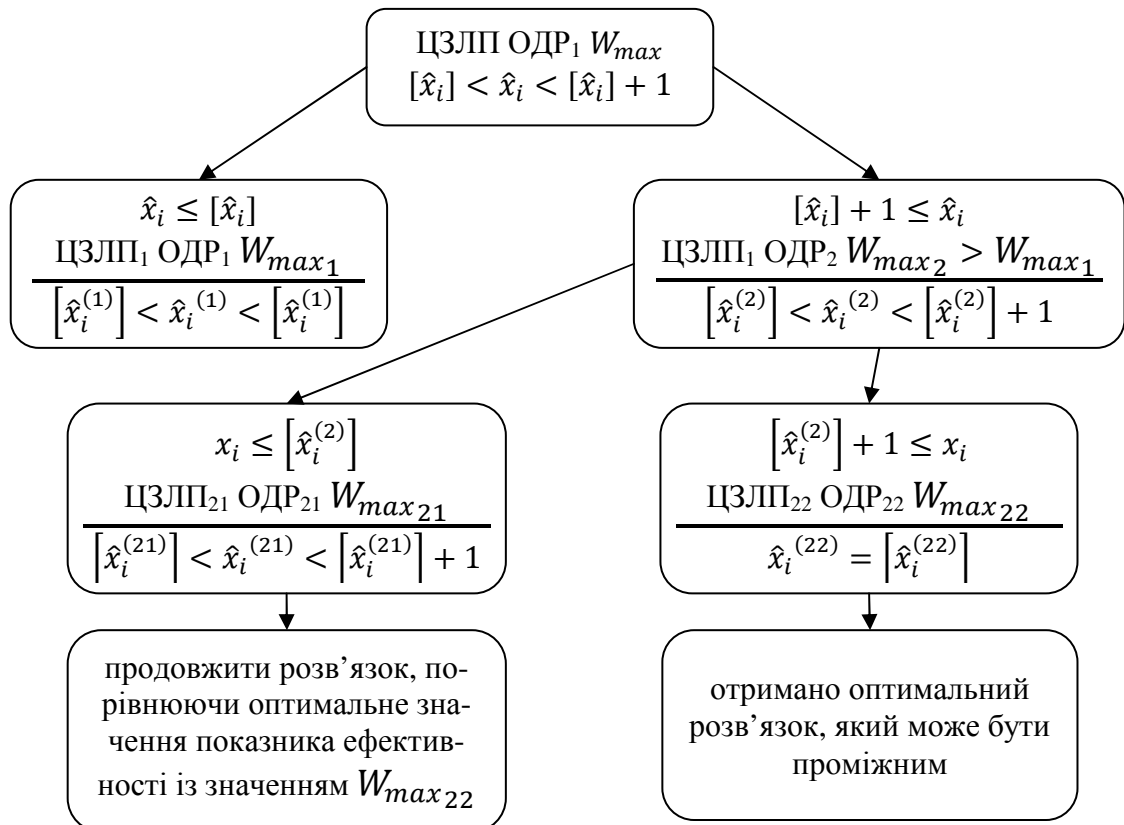


Рис. 13.2. Приклад структури методу гілок та границь при умові, що всі змінні окрім x_i на кожній ітерації залишаються цілочисельними та невід'ємними

Процедура розгалуження припиняється тоді, коли буде знайдено цілочисельний розв'язок. Границями вважаються значення показника ефективності задачі і підзадач кожної гілки. На кожній ітерації подальшому розгалуженню (розподіленню на нові підзадачі) підлягає та гілка, на якій значення показника ефективності виявилось більшим. Тому окремі підзадачі (гілки, за якими отримано менші значення показника ефективності) можливо відкинути, але можливі випадки з поверненням, коли у подальших ітераціях відбулося зменшення показника ефективності нижче раніше виявленого рівня на гілках, що вважалися неперспективними. Оскільки множина усіх розв'язків цілочисельної задачі лінійного програмування скінченна, то після скінченної кількості ітерацій, оптимальний розв'язок буде знайдено. ●

Приклад 13.3.

Знайти максимум показника ефективності методом гілок та границь із використанням функції **linprog** системи комп'ютерної математики MATLAB:

$$\begin{cases} W = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max_{x_{1,2,3} \in \mathbb{N}_0}; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20, \\ 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \leq 40. \end{cases}$$

○ Метод гілок і границь.

Вихідна послаблена ЦЗЛП, представлена як симетрична ЗЛП у форматі

```
>> f=[-2;-4;-3]
>> A=[2 3 1
      9 7 10]
>> b=[20;40]
>> lb=[0;0;0]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,[],[],lb,[])
Optimization terminated successfully.
X = 0.0000
    5.7143
    0.0000
W = -22.8571
```

Гілка 1

```
>> A=[2 3 1
      9 7 10
      0 1 0]
>> b=[20;40;5]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,[],[],lb,[])
Optimization terminated successfully.
X = 0.0000
```

```
5.0000
0.5000
W = -21.5000
```

Гілка 1.1

```
>> Aeq=[0 0 1]
>> beq=[0]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[])
Optimization terminated successfully.
X = 0.5556
5.0000
0
W = -21.1111
```

Гілка 1.1.1

```
>> Aeq=[1 0 0
        0 0 1]
>> beq=[0;0]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,[])
Optimization terminated successfully.
X = 0
5.0000
0
```

W = -20.0000

Гілка 2

```
>> A=[2 3 1
      9 7 10
      0 -1 0]
>> b=[20;40;-6]
>> [X,W]=linprog(f,A,b,[],[],lb,[])
Exiting: One or more of the residuals, duality gap, or total relative error
has stalled:
the primal appears to be infeasible (and the dual unbounded).
(The dual residual < TolFun=1.00e-008.)
X = 0.0001
5.8937
0.0006
W = -23.5768
```

Висновок: отримано оптимальний цілочисельний розв'язок
 $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=0$, $W = 20$. ●