

Лекція 11. Післяоптимізаційний аналіз задачі лінійного програмування

11.1. Ідея аналізу параметричної чуттєвості

Післяоптимізаційний аналіз або, як ще кажуть, аналіз чуттєвості полягає у зв'язуванні впливу структурних, параметричних та структурно-параметричних змін у математичній моделі (математичній постановці) задачі на отриманий оптимальний розв'язок для тієї постановки задачі лінійного програмування, яка вважається вихідною.

Розглянемо приклад 4.1, в якому було з'ясовано, що для отримання максимального прибутку необхідно випустити продукцію типу A (супутники зв'язку) $\hat{x}_1 = 17\frac{1}{7} \approx 17$ та типу B (навігаційні супутники) $\hat{x}_2 = 23\frac{4}{7} \approx 23$. Оптимальний розв'язок було отримано за умови, що вартість виробів A та B складає відповідно 40 та 50 умовних одиниць. У зв'язку зі змінами, що відбуваються в світовій економіці, керівнику фірми (особі, що приймає рішення) важливо знати, як вплине зміна вартості продукції A та B (питомий прибуток) на запланований випуск продукції $\hat{x}_{1,2}$ (рис.11.1).

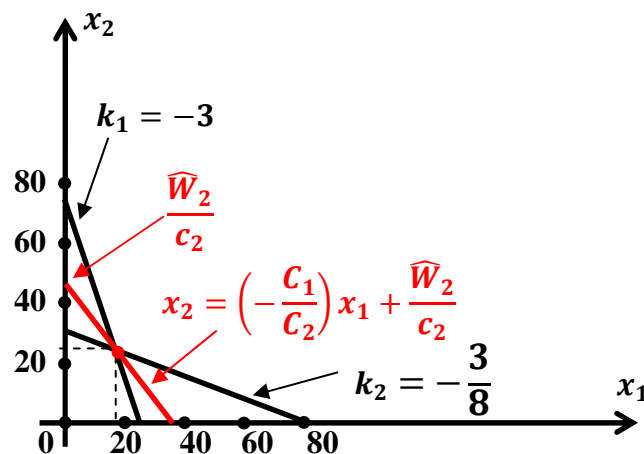


Рис. 11.1. Графічна ілюстрація алгоритму визначення меж зміни співвідношення між c_1 та c_2 у виразі для обчислення показника ефективності, при яких оптимальний розв'язок (\hat{x}_1, \hat{x}_2) залишається незмінним.

Як бачимо, при умові

$$-3 < -\frac{c_1}{c_2} < -\frac{3}{8} \Leftrightarrow 3 > \frac{c_1}{c_2} > \frac{3}{8} \Leftrightarrow 3 > \frac{c_1}{c_2} > 0,375$$

оптимальний план випуску продукції не зміниться, тому що «основна пряма»

$$W = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

проходитиме через кутову точку із координатами $\left(\hat{x}_1 = 17\frac{1}{7}, \hat{x}_2 = 23\frac{4}{7}\right)$, що забезпечує максимальне значення показника ефективності. При $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{8}$ або

$\frac{c_1}{c_2} = 3$ має місце невизначеність.

Якщо $\frac{c_1}{c_2} < \frac{3}{8}$, то оптимальною точкою буде $(0,30)$, а якщо $\frac{c_1}{c_2} > 3$, то оп-

тимальною точкою буде $(25,0)$, що з фізичної точки зору означає відповідно недоцільність випуску супутників зв'язку або навігаційних супутників. При зміні співвідношення між c_1 та c_2 відбувається зміна оптимального значення показника ефективності.

Зрозуміло, що взагалі зміна будь-якого параметра математичної моделі задачі лінійного програмування (об'єм ресурсів та їх вартість), норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції впливатиме на оптимальне рішення і значення показника ефективності. Кількісне дослідження цих змін і виконується в процесі аналізу чутливості математичної моделі задачі лінійного програмування. Наведений простий приклад аналізу чутливості оптимального рішення задачі лінійного програмування та значення показника ефективності до зміни параметрів математичної моделі має ілюстративний характер і для використання у багатовимірному випадку ($n \geq 3$, де n – кількість змінних) стає громіздким.

Для дослідження впливу властивостей задачі лінійного програмування на її оптимальне за вихідною постановкою рішення в загальному багатовимірному випадку використовують спеціальним чином переформульовану вихідну задачу лінійного програмування, яка отримала назву *двоїста (спряжена) задача лінійного програмування*, або використовують так зване *параметричне програмування*.

11.2. Ідея фізичного змісту побудови математичної моделі двоїстої задачі лінійного програмування

У прикладі 4.1 було поставлено за мету отримати максимальний прибуток від виробництва виробів A та B , але нічого не було сказано про вартість ресурсу, який використовувався для створення цих виробів, тобто нічого не було сказано про витрати, які необхідно мінімізувати, але таким чином, щоб не зменшити питомий прибуток (собівартість виробленої продукції).

Припустимо, що одиниця ресурсу C , D , E коштує відповідно u_1 , u_2 , u_3 . Тоді вартість виробів можливо обчислити за виразами відповідно $24u_1 + 8u_2 + 3u_3$ і $8u_1 + 8u_2 + 8u_3$.

Задача лінійного програмування із змінними $u_{1,2,3}$ формулюється так: якою повинна бути вартість кожного окремого ресурсу для того, щоб не зменшуючи вартості одиниці виробу, досягти мінімуму сумарної вартості ресурсів. Математична постановка задачі в цьому випадку набуває вигляду:

$$W = 600u_1 + 480u_2 + 240u_3 \rightarrow \min_{u_{1,2,3} \geq 0}$$

за умов

$$\begin{cases} 24u_1 + 8u_2 + 3u_3 \geq 40, \\ 8u_1 + 8u_2 + 8u_3 \geq 50. \end{cases}$$

Записана задача лінійного програмування має назву двоїстої по відношенню до задачі прикладу 5.1.

11.3. Загальна постановка і правила побудови двоїстої задачі

Кожній задачі лінійного програмування можливо поставити у відповідність задачу, яку називають двоїстою до неї. Припустимо, що загальна задача лінійного програмування (вихідна, або, як ще кажуть, пряма задача) задана у вигляді:

$$W = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{x_j \geq 0} \overline{(j=1, n)} \quad (11.1)$$

за умови виконання обмежень

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}). \quad (11.2)$$

Двоїста (спряжена до неї) задача має вигляд:

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^m b_i u_i \rightarrow \min_{u_i \geq 0} \overline{(j=1, m)}, \quad (11.3)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq c_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (11.4)$$

Задача (11.3), (11.4) – двоїста до задачі (11.1), (11.2) – будується за наступними правилами:

1. Виконується впорядкування вихідної задачі до виду (11.3), (11.4), тобто якщо цільова функція максимізується, то нерівності-обмеження повинні бути приведені до вигляду « \leq », а якщо мінімізується, то до вигляду « \geq ». Досягти виконання потрібної орієнтації знаку обмежень можливо множенням обох його частин на (-1) .

2. Якщо вихідна задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації. При цьому вектор, який утворено із коефіцієнтів при невідомих в показнику ефективності вихідної задачі співпадає із вектором констант в

правих частинах системи обмежень двоїстої задачі, і, навпаки, коефіцієнти при невідомих в показнику ефективності двоїстої задачі є відповідними правими частинами системи обмежень вихідної задачі.

3. Кожній змінній u_i двоїстої задачі відповідає i -те обмеження вихідної задачі і навпаки, кожній змінній x_j вихідної задачі відповідає j -те обмеження двоїстої задачі.

4. Матриця коефіцієнтів двоїстої задачі може бути отримана транспонуванням матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$, складеної із коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень вихідної задачі.

Задачі (11.1), (11.2) та (11.3), (11.4) утворюють симетричну пару взаємно двоїстих задач. Якщо використати позначення:

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n),$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T,$$

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} - \text{прямокутна матриця розміром } m \times n,$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T,$$

$$Q_k = (0, \dots, 0)_k^T - \text{вектор-стовпець нулів розмірності } k;$$

то пряму і двоїсту задачі лінійного програмування можливо записати у вигляді:

$$\begin{cases} W = C \cdot X \rightarrow \max_{X \geq 0_n} \\ A \cdot X \leq B \end{cases} - \text{пряма,}$$

$$\begin{cases} \tilde{W} = B^T \cdot U \rightarrow \min_{U \geq 0_m} \\ A^T \cdot U \geq C^T \end{cases} - \text{двоїста.}$$

Розглянемо двоїсту задачу лінійного програмування (11.3), (11.4) як вихідну задачу лінійного програмування і, скориставшись правилами переходу до двоїстої задачі, отримаємо пряму задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} -\tilde{W} = -B^T \cdot U \rightarrow \max_{U \geq 0_m}, \\ -A^T \cdot U \geq -C^T. \end{cases}$$

І далі, після перетворення, можемо записати:

$$\begin{cases} -W = -C \cdot X \rightarrow \min_{X \geq 0_n}, \\ -A \cdot X \geq -B; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W = C \cdot X \rightarrow \max_{X \geq 0_n}, \\ A \cdot X \leq B. \end{cases}$$

Висновок:

- 1) Двоїста задача лінійного програмування до двоїстої задачі лінійного програмування є прямою задачею.
- 2) В системі пряма-двоїста обидві задачі лінійного програмування рівноправні. Кожну з них можливо розглядати як пряму, і тоді інша вважається двоїстою до неї.

Приклад 11.1.

Задана задача лінійного програмування:

$$\begin{cases} W = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \rightarrow \min ; \\ 0 \leq x_{1,2,3} \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_3 \geq 4. \end{cases}$$

Необхідно побудувати двоїсту задачу лінійного програмування.

○Приведемо задану задачу лінійного програмування до вигляду (11.1), (11.2).

$$\begin{cases} -W = -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max, \\ x_{1,2,3} \geq 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -6, \\ -x_3 \leq -4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -W = (-1 \ 4 \ 3) \cdot (x_1 \ x_2 \ x_3)^T \rightarrow \max, \\ x_{1,2,3} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Двоїста ЗЛП набуває вигляду:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \rightarrow \min_{u_{1,2,3,4} \geq 0}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = 7u_1 + 6u_2 - 6u_3 - 4u_4 \rightarrow \min_{u_{1,2,3,4} \geq 0}; \\ 3u_1 + u_2 - u_3 \geq -1, \\ 4u_1 + 2u_2 - 2u_3 \geq 4, \\ u_1 + u_2 - u_3 - 4u_4 \geq 3. \bullet \end{cases}$$

Приклад 11.2.

Пряма задача лінійного програмування задана у вигляді:

$$\begin{cases} W = 6x_1 + 10x \rightarrow \max_{x_1 \geq 0}, \\ 5x_1 + 3x \geq 10, \\ x_1 - x \leq 4. \end{cases}$$

Побудувати двоїсту задачу.

○Приведемо пряму задачу до стандартного вигляду. Для цього позначимо

$$x = x_2 - x_3 \in \mathbb{R}, x_{2,3} \geq 0$$

Тоді:

$$\begin{cases} W = 6x_1 + 10x_2 - 10x_3 \rightarrow \max_{x_{1,2,3} \geq 0}; \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq -10, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \max_{x_{1,2,3} \geq 0}; \\ \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Двоїста задача набуває вигляду:

$$\begin{cases} W = \begin{bmatrix} -10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \rightarrow \min_{u_{1,2} \geq 0}, \\ \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = -10u_1 + 4u_2 \rightarrow \min_{u_{1,2} \geq 0}, \\ -5u_1 + u_2 \geq 6, \\ -3u_1 - u_2 \geq 10, \\ 3u_1 + u_2 \geq -10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = -10u_1 + 4u_2 \rightarrow \min_{u_{1,2} \geq 0}, \\ -5u_1 + u_2 \geq 6, \\ -3u_1 - u_2 = 10. \bullet \end{cases}$$

Приклад 11.3.

Побудувати задачу двоїсту до заданої задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} W = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_{123} \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 9, \\ 2x_1 + x_3 \geq 4. \end{cases}$$

○Маємо:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} W = [111] \cdot [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \rightarrow \min, \\ x_{123} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \tilde{W} = [9 \ 4] \cdot [u_1 \ u_2]^T, \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{W} = 9u_1 + 4u_2 \rightarrow \max, \\ x_{123} \geq 0 \\ u_1 + 2u_2 \leq 1, \\ 2u_1 \leq 1, \\ u_1 + u_2 \leq 1. \bullet \end{cases} \end{aligned}$$

11.4. Основні теореми двоїстості

Теорема 11.1.

Якщо одна із двоїстих задач має оптимальний розв'язок $\hat{X} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$, то і інша має оптимальний розв'язок $\hat{U} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_m]^T$, при цьому екстремальні значення показ-

ника ефективності обох задач співпадають $\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \hat{u}_i$.

Зауваження 11.1.

Якщо показник ефективності однієї із задач необмежений, то інша задача не має розв'язків.

Наслідок 11.1.

1. Для існування розв'язку однієї з двоїстих задач, необхідно і достатньо, щоб інша мала хоча б один розв'язок;
2. Для того щоб $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ та $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ були оптимальними розв'язками пари двоїстих задач, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i u_i.$$

Теорема 11.2.

Якщо будь яка змінна \hat{x}_j ($j = \overline{1, n}$) оптимального розв'язку прямої задачі додатна, то j -те обмеження двоїстої задачі на оптимальному розв'язку перетворюється у рівність. Якщо оптимальне рішення прямої задачі перетворює будь яке i -те обмеження у строгу нерівність, то в оптимальному розв'язку двоїстої задачі змінна \hat{u}_i дорівнює 0.

Зауваження 11.2.

Теорема 11.2 ще має назву «умова доповняльної нежорсткості» і формально записується у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{u}_i - c_j \right) \cdot \hat{x}_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{x}_j - b_i \right) \cdot \hat{u}_i = 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right.$$

Теорема 11.3.

В оптимальному розв'язку двоїстої задачі значення змінних чисельно дорівнюють частинним похідним $\frac{\partial W_{max}}{\partial b_i}$, для прямої задачі:

$$\hat{u}_i = \frac{\partial W_{max}}{\partial b_i}, \quad i = \overline{1, m},$$

де ΔW_{max} – зміна максимального значення показника ефективності W , при одному і тому самому двоїстому плані, викликано малою зміною b_i прямої задачі.

► Покажемо, що при змінненні правих частин b_i ($i = \overline{1, m}$) обмежень прямої задачі невідомі двоїстої задачі можливо інтерпретувати як оцінки впливу цих змінних на оптимальне значення показника ефективності прямої задачі. Позначимо

$$\Delta B = [\Delta b_1, \dots, \Delta b_m]^T,$$

де Δb_i – приріст i -ої правої частини прямої задачі.

Розглянемо дві двоїсті задачі:

1) Пряма:

$$\begin{cases} W = C \cdot X_1 \rightarrow \max, \\ X_1 \geq 0_n \\ A \cdot X_1 \leq B \end{cases}$$

та двоїста:

$$\begin{cases} \tilde{W} = B^T \cdot U_1 \rightarrow \min, \\ U_1 \geq 0_m \\ A^T \cdot U_1 \geq C^T. \end{cases}$$

2) Пряма:

$$\begin{cases} W = C \cdot X_2 \rightarrow \max, \\ X_2 \geq 0_n \\ A \cdot X_2 \leq (B + \Delta B) \end{cases}$$

де

$$\Delta B = \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \vdots \\ \Delta b_m \end{bmatrix} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Delta b_1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta b_m \rightarrow 0 \end{bmatrix}$$

та двоїста:

$$\begin{cases} \tilde{W} = (B + \Delta B)^T \cdot U_2 \rightarrow \min, \\ U_2 \geq 0_m \\ A^T \cdot U_2 \geq C^T. \end{cases}$$

Вимога, яка полягає в тому, що $\Delta B \rightarrow 0$, означає, що заміна B на $B + \Delta B$ у двоїстій задачі не призводить до зміни її оптимального розв'язку $\hat{U}_2 = \hat{U}_1$. Тоді, відповідно до першої теореми двоїстості, можна записати для першої пари задач:

$$W_{\max_1} = \hat{W}_{\min_1} \Leftrightarrow C\hat{X}_1 = B^T\hat{U}_1$$

та для другої пари задач:

$$W_{\max_2} = \hat{W}_{\min_2} \Leftrightarrow C\hat{X}_2 = (B + \Delta B)^T \hat{U}_1.$$

Обчислимо приріст показника ефективності, прямої задачі

$$\begin{aligned} \Delta W_{\max} &= W_{\max_2} - W_{\max_1} = (B + \Delta B)^T \hat{U}_1 - B^T \hat{U}_1 = \\ &= (B^T + \Delta B^T - B^T) \hat{U}_1 = \Delta B^T \hat{U}_1 = [\Delta b_1, \dots, \Delta b_m] \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \Delta b_i \cdot \hat{u}_i. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Із доведеної теореми 11.3 випливає, що розв'язок двоїстої задачі u_i (двоїста оцінка) кількісно дорівнює приросту максимального значення показника ефективності прямої задачі при зміні правої частини i -го обмеження прямої задачі на одиницю.