

Лекція 8. Транспортна задача лінійного програмування

8.1. Постановка транспортної задачі

Симплекс-метод – універсальний метод розв’язку задачі лінійного програмування, але існує клас задач лінійного програмування, які дозволяють отримати розв’язок простішими методами. Найбільш відомою є *транспортна задача*. Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється наступним чином: існує m пунктів відправлення A_1, A_2, \dots, A_m , в яких зосереджено запаси деякого товару у кількості відповідно a_1, a_2, \dots, a_m одиниць. Крім того є n пунктів призначення B_1, B_2, \dots, B_n , що надали заявки на отримання товару відповідно у кількості b_1, b_2, \dots, b_n одиниць. Вважаємо, що сума усіх заявок дорівнює сумі усіх товарів:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (8.1)$$

Відомою є вартість c_{ij} – перевезення одиниці товару від кожного пункту відправлення A_i до кожного пункту призначення B_j . Таблиця вартості перевезення відома:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

Необхідно скласти такий план перевезень, при якому всі заявки були б виконані і при цьому загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною. При такій постановці задачі показником ефективності плану перевезень є вартість. Тому поставлену задачу називають транспортною задачею за критерієм вартості.

Дамо математичну постановку цієї задачі. Позначимо x_{ij} ($x_{ij} \geq 0$) – кількість товару, який відправляється із i -го пункту відправлення A_i до j -го пункту призначення B_j ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$). На змінні x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) накладаються наступні умови (обмеження):

1) Сумарна кількість товару, що відправляється із кожного пункту відправлення в усі пункти призначення повинна дорівнювати запасу в даному пункті.

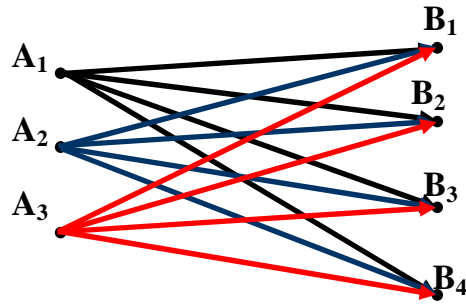


Рис.8.1. Графічний образ пояснення стосовно виникнення обмежень

Ця умова дає m рівнянь-обмежень:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{1j} = a_1, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n x_{mj} = a_m. \end{array} \right. \quad (8.3)$$

2) Сумарна кількість товару, що поступає в кожен пункт призначення із усіх пунктів відправлення повинна дорівнювати замовленню, що надійшло від даного пункту. Ця умова дає n рівнянь-обмежень.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{i1} = b_1, \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m x_{in} = b_n. \end{array} \right. \quad (8.4)$$

3) Сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною

$$W = c_{11}x_{11} + \dots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min_{x_{ij} \geq 0} \left(\overline{i=1, m}, \overline{j=1, n} \right) \quad (8.5)$$

Показник ефективності (8.5), рівняння-обмеження (8.3), (8.4) є лінійними функціями відносно змінних x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), тобто задача про транспортні перевезення за вартісним критерієм поставлена як основна задача лінійного програмування. Як і будь яку задачу лінійного програмування, транспортну задачу лінійного програмування можливо розв'язати із використанням симплекс-методу розв'язання задачі лінійного програмування, але розмірність цієї задачі, яка дорівнює кількості змінних параметрів, які потрібно знайти, щоб задовольнити (8.5), дорівнює $m \times n$. Це означає, що при $m = 10$ та $n = 10$ (всього 10 складів та 10 пунктів прийому товару) отримаємо 100 змінних. Для досить простої транспортної задачі лінійного програмування різко зростає кількість невідомих і традиційний, розглянутий вище, симплекс-метод потребує значних обчислювальних потужностей.

Враховуючи той факт, що всі коефіцієнти при змінних в обмеженнях (8.3) та (8.4) дорівнюють 1 або 0 можливо спростити процедуру обчислення оптимального розв'язку. Перед початком викладення методу розв'язання транспортної задачі з'ясуємо особливості системи рівнянь обмежень (8.3) та (8.4).

Якщо скласти ліві і праві частини цих обмежень, то отримаємо рівняння: сума запасів дорівнює сумі замовлень. Тобто всього лінійно незалежних обмежень в (8.3) та (8.4) буде $(m + n - 1)$. Це означає, що ранг системи рівнянь-обмежень дорівнює $r = m + n - 1$. Тому можливо розв'язати ці рівняння відносно $(m + n - 1)$ базисної змінної, вважаючи інші

$$k = mn - (m + n - 1) = m(n - 1) - (n - 1) = (m - 1)(n - 1)$$

вільними змінними.

Раніше було показано, що в задачі лінійного програмування оптимальний розв'язок досягається в одній із вершин області допустимих розв'язків і при цьому хоча б k змінних перетворюються в 0. Це означає, що у випадку транспортної задачі $(m - 1)(n - 1)$ змінних теж повинні дорівнювати 0 у вершині ОДР (опорній точці). При розв'язанні транспортної задачі зазвичай використовують наступну термінологію:

- перевезення x_{ij} – кількість одиниць вантажу, що перевозять із пункту відправлення A_i до пункту прийому B_j ;
- план перевезень (x_{ij}) – будь-яка сукупність значень x_{ij} ;
- допустимий план $(x_{ij})_д$ – план, який задовольняє балансовим умовам: усі заявки задоволені, усі запаси вичерпані, при цьому $x_{ij} \geq 0$;
- опорний план $(x_{ij})_{оп}$ – допустимий план, в якому відмінні від 0 не більше, ніж $r = m + n - 1$ базисних перевезень x_{ij} , а всі інші дорівнюють 0;
- оптимальний план $(x_{ij})_{опт}$ – опорний план, при якому досягається найменше значення показника ефективності (вартості перевезень).

Перейдемо до викладення методів розв'язання транспортної задачі. Ці методи не потребують використання симплекс-таблиць, але використовують так звану транспортну таблицю (табл. 8.1). До неї записують:

- пункти відправлення і пункти призначення;
- запаси, розташовані у пунктах відправлення;
- заявки, розташовані у пунктах призначення;
- вартість перевезень з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення одиниці вантажу.

Зразок транспортної таблиці

Таблиця 8.1

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	...	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	...	c_{2n}	a_2
...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	...	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	b_3	...	b_n	$\sum b = \sum a$

Вартість перевезень c_{ij} розташуємо у правому верхньому куті кожного віконця, а всередині цього віконця будемо записувати перевезення x_{ij} . Пам'ятаючи визначення опорного плану, можливо стверджувати, що у $r = m + n - 1$ віконці будуть записані числа, відмінні від 0. Ці віконця будемо називати базисними, а інші (пусті або нульові) – вільними. Таким чином, розв'язок транспортної задачі можливо знайти, якщо заповнити транспортну таблицю і при цьому виконати наступні умови:

- сума перевезень у кожному рядку транспортної таблиці дорівнює запасу даного пункту відправлення;
- сума перевезень у кожному стовпці транспортної таблиці дорівнює заявці пунктів прийому;
- загальна вартість перевезень повинна бути мінімальною.

Всі наступні дії, пов'язані із пошуком оптимального плану будуть використовувати зручну (наочну) форму представлення інформації про транспортну задачу у вигляді транспортної таблиці.

8.2. Табличний метод пошуку опорного плану (метод "північно-західного кута")

Пошук розв'язку транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування, починається із знаходження *опорного розв'язку* або *опорного плану*. На відміну від загального випадку основної задачі лінійного програмування із довільними обмеженнями і показником ефективності, розв'язок транспортної задачі завжди існує. Дійсно, із фізичних міркувань зрозуміло, що хоч якийсь допустиме рішення (допустимий план) повинно існувати. Пояснимо на конкретному прикладі основні прийоми методу пошуку опорного розв'язку, який отримав назву *метод "північно-західного кута"* (табл.8.2).

Таблиця 8.2

Вихідні дані та приклад побудови опорного розв'язку

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 18	8 27	5 3	6	9	48
A_2	6	7	8 30	6	5	30
A_3	8	7	10 9	8 12	7 6	27
A_4	7	5	4	6	8 20	20
b_j	18	27	42	12	26	125

Припустимо, що умова транспортної задачі задана за допомогою транспортної таблиці. Необхідно знайти опорний розв'язок (побудувати опорний план). Розв'язання задачі починаємо із лівої верхньої позиції верхнього віконця із координатами $(1;1)$, що відповідає образному сприйняттю цієї позиції як «північно-західного» напрямку на географічній карті північної півкулі. За рахунок пункту відправлення A_1 задовольняємо вимогу пункту призначення B_1 і записуємо перевезення у віконце із координатами $(1;1)$. Потім задовольняємо запит пункту призначення B_2 і далі записуємо залишок у віконце із координатами $(1;3)$. Недовиконання заявки пункту призначення B_3 за рахунок пункту відправлення A_1 доповнюємо поставками із A_2 та A_3 і т.д. Віконця таблиці, в яких стоять ненульові перевезення є базовими. Їх кількість повинна дорівнювати

$$r = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 8.$$

Вільні (порожні) означають 0 перевезень, тобто це вільні змінні, яких повинно бути щонайменше

$$k = (m - 1)(n - 1) = (4 - 1)(5 - 1) = 12.$$

Таким чином, можна стверджувати, що опорний розв'язок знайдено. Обчислимо його вартість:

$$W = 18 \cdot 10 + 27 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 30 \cdot 8 + 9 \cdot 10 + 12 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 20 \cdot 8 = 1039.$$

Зрозуміло, що знайдене значення W не є оптимальним, хоча б тому, що не використовувався алгоритм покращення опорного розв'язку. Перейдемо до алгоритму покращення опорного плану. Виконаємо так звану циклічну перестановку, наприклад, 18 одиниць вантажу із віконця з координатами $(1;1)$ перемістимо у віконце із координатами $(1;3)$ і далі через віконце $(2;3)$ до $(2;1)$, зберігаючи балансові співвідношення (табл. 8.3).

Таблиця 8.3

Покращення опорного плану

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	8	5	6	9	48
A_2	6	7	8	6	5	30
A_3	8	7	10	8	7	27
A_4	7	5	4	6	8	20
b_j	18	27	42	12	26	125

Показник ефективності для транспортної таблиці набуває значення:

$$W = 18 \cdot 6 + 27 \cdot 8 + 21 \cdot 5 + 12 \cdot 8 + 9 \cdot 10 + 12 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 20 \cdot 8 = 913,$$

що на 126 одиниць менше показника ефективності, розрахованого для попереднього опорного плану. Наведений в табл. 8.3, як приклад, спосіб циклічної перестановки лежить в основі алгоритму оптимізації плану перевезень. Перед тим, як перейти до алгоритму оптимізації, розглянемо так званий "вироджений" план транспортної задачі, коли нулю дорівнюють не лише вільні змінні, але й частина базисних (табл. 8.4).

Кількість базисних змінних згідно заданої транспортної таблиці повинна дорівнювати $r = 4 + 5 - 1 = 8$, але в отриманому за допомогою метода "північно-західного" кута плані перевезень ненульовими є 6 змінних, тобто виродженою є задача, в якій деякі з базисних змінних дорівнюють 0. Для побудови стійкого алгоритму обчислення оптимального розв'язку бажано на кожній ітерації мати всі базисні змінні ненульовими.

Таблиця 8.4

Приклад "виродженого" плану

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	10				20
A_2			20	10		30
A_3				25		25
A_4					20	20
b_j	10	10	20	35	20	95

З метою уникнення ситуації виникнення "виродженого" плану достатньо штуч-

но на незначну величину ε змінити запаси і заявки (табл. 8.5), а потім, після знаходження оптимального плану, покласти $\varepsilon = 0$.

Таблиця 8.5

Приклад уникнення "виродженого" плану

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	10	ε			$20 + \varepsilon$
A_2			$20 - \varepsilon$	$10 + \varepsilon$		30
A_3				$25 - \varepsilon$	ε	25
A_4					$20 - \varepsilon$	$20 - \varepsilon$
b_j	10	10	20	35	20	95

В отриманій таблиці маємо розрахункову кількість ненульових базисних змінних. Вона дорівнює 8. В двох наведених вище таблицях не вказана вартість перевезень одиниці товару c_{ij} , тому що нас цікавив лише приклад побудови опорного плану та прийоми уникнення появи "виродженого" плану.

8.3. Метод пошуку оптимального плану шляхом циклічного перерахунку (метод циклічного перерахунку або розподільчий метод)

Циклом у транспортній таблиці будемо називати декілька віконць, з'єднаних між собою уявною неперервною ламаною лінією, яка у кожному спеціально обраному віконці розвертається на 90° таким чином, щоб утворити із початковим віконцем замкнену лінію.

Таблиця 8.6

Пояснення щодо методу циклічного перерахунку

ПВ	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	a_3
A_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	c_{45}	a_4
b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Так, наприклад, в таблиці 8.6 показано 2 цикли:

–Ц1 – з 4 вершинами

–Ц2 – з 6 вершинами

Кожен цикл має парну кількість вершин та сторін, тобто ланцюгів, що зв'язують ці вершини. Вершини позначимо «+» або «-» в залежності від збільшення, або зменшення перевезень. Цикл з позначеними вершинами будемо *називати перенесеннями*. Перенести кількість одиниць вантажу по означеному циклу, означає збільшити перевезення, що стоять у додатних вершинах циклу, на деяку кількість одиниць вантажу, а перевезення, що стоять у від'ємних вершинах – зменшити на ту саму кількість. Зрозуміло, що при будь-якому циклічному перенесенні, що зберігає невід'ємність перевезень виконується закон збереження матерії, тобто зберігаються балансові умови, але вартість плану змінюється. Вартістю циклу називається зміна вартості перевезень при переміщенні одиниці вантажу по означеному циклу. Кількісна вартість циклу дорівнює алгебраїчній сумі вартостей, що розташовані у вершинах циклу, із врахуванням знаку вершин. Наприклад, вартість Ц1 та Ц2 можливо обчислити:

$$V_{ц1} = c_{21} - c_{23} + c_{13} - c_{11},$$

$$V_{ц2} = c_{32} - c_{42} + c_{45} - c_{15} + c_{14} - c_{34}.$$

Якщо вартість циклу від'ємна, то переміщення по цьому циклу ΔX одиниці вантажу призводить до зменшення загальної вартості перевезень на $\Delta x \cdot V_{ц}$ одиниць.

Процедура зменшення загальної вартості припиняється тоді, коли циклів із від'ємною вартістю вже не буде. Тобто покращення плану перевезень бути не може. Оптимальний план досягнуто.

При покращенні плану перевезень за рахунок циклічних перенесень, як правило, користуються прийомами симплекс-методу: на кожній ітерації, присвяченій зміні циклу замінюють одну базисну змінну вільною і навпаки; загальна кількість базисних змінних залишається незмінною. Доведено, що для будь-якого вільного віконця транспортної таблиці завжди існує цикл і при тому єдиний, одна з вершин якого лежить у цьому вільному віконці, а всі інші у базисних віконцях.

Приклад 8.1.

Розглянемо комплексне застосування методу північно-західного кута та циклічного перерахунку для пошуку оптимального плану транспортної задачі, яка задана за допомогою транспортної таблиці 8.7.

Таблиця 8.7

Вихідні дані прикладу 8.1

ПВ	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	- 10 22 - Ц1 + 9	+ 7	6	8	31
A_2	+ 5 - - - - 25	6	23	4	48
A_3	8	7	18	7	38
b_j	22	34	41	20	117

○1. Складемо опорний план методом північно-західного кута. Кількість базисних змінних повинна дорівнювати

$$r = m + n - 1 = 6,$$

що відповідає плану, наведеному у таблиці 9.1. Задача «не вироджена».

Обчислимо значення показника ефективності

$$W = 22 \cdot 10 + 9 \cdot 7 + 25 \cdot 6 + 23 \cdot 5 + 18 \cdot 6 + 20 \cdot 7 = 796.$$

2. Покращимо план (табл. 8.8), замінивши вільну клітинку з координатами (2;1). Вартість циклу

$$V_{ц1} = 5 + 7 - 10 - 6 = -4.$$

Покращимо план за рахунок переміщення 22 одиниць вантажу, інакше у (1;1) буде від'ємне число, чого неможливо допустити, бо від'ємних перевезень не може бути.

Покращений план має показник ефективності

$$W_1 = 796 - 22 \cdot 4 = 708.$$

Таблиця 8.8

Покращений план за циклом Ц1

ПВ	Пункти призначення				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	7	6	8	31
A_2	5 22	6 3	- 5 23 - Ц2 +	4	48
A_3	8	7	+ 6 18 - - - -	7	38
b_j	22	34	41	20	117

Сформулюємо правило підбору циклу, що є чотирикутником:

- 1). Лише в одній вершині розташоване вільне віконце;
- 2). У вільному віконці завжди «+»;

- 3). Суми вартості по діагоналі, що включає вільне віконце менше за суму вартості іншої діагоналі.
3. Друга ітерація. Обираємо цикл Ц2 (див. табл. 8.8) з вільним віконцем із координатами (2; 4):

$$V_{\text{ц2}} = 4 + 6 - 5 - 7 = -2,$$

$$\Delta x \cdot V_{\text{ц2}} = 20 \cdot (-2) = -40,$$

$$W_2 = 708 - 40 = 668.$$

Результат перенесень за Ц2 представлено у табл. 8.9.

Таблиця 8.9

Покращений план за циклом Ц2

ПВ	Пункти призначення				Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	10	7	6	8	31
A ₂	5	6	5	4	48
A ₃	8	7	6	7	38
b _j	22	34	41	20	117

План, наведений в табл. 8.9 є оптимальним, тому що всі цикли побудовані для вільних клітинок, мають додатну вартість. ●

Отже, розподільчий (циклічний) метод полягає в безпосередньому пошуку вільних клітинок транспортної таблиці із від'ємною вартістю циклу і в перенесенні перевезень за цим циклом.

Приклад 8.2.

Знайти оптимальний план перевезень для транспортної задачі заданої транспортною таблицею 8.10.

Таблиця 8.10

Вихідні дані для прикладу 8.2

ПВ	Пункти призначення			Запаси
	B ₁	B ₂	B ₃	
A ₁	- 10 20	7 20	+ 6 ε	40 + ε
A ₂	+ 5	6	- 5 23	23
A ₃	8	7	6 20 - ε	20 - ε
b _j	20	20	43	83

○1. Будуємо опорний план методом північно-західного кута та перевіряємо його на невиродженість:

$$r = n + m - 1 = 3 + 3 - 1 = 5 > 4.$$

Опорний план вироджений.

2. Для уникнення виродженості використовуємо метод збурень запасів та заявок на величину $\pm\varepsilon$, відповідно у першому та третьому рядках.

3. Розподільчим методом покращуємо розв'язок, використовуючи цикл Ц1 (табл. 8.11):

$$V_{\text{ц1}} = 5 + 6 - 10 - 5 = -4,$$

$$\Delta x \cdot V_{\text{ц1}} = 20 \cdot (-4) = -80.$$

Таблиця 8.11

Покращення плану із використанням Ц1

ПВ	Пункти призначення			Запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	7	6	$40 + \varepsilon$
A_2	5	6	5	23
A_3	8	7	6	$20 - \varepsilon$
b_j	20	20	43	83

Отримана транспортна таблиця (див. табл. 8.11) відображає оптимальний план перевезень. Циклів з від'ємною вартістю по відношенню до вільних клітинок немає. Показник ефективності дорівнює

$$W = \left(20 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + (20 + \varepsilon) \cdot 6 + (20 - \varepsilon) \cdot 6 + 3 \cdot 5 \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 495. \bullet$$