

Лекція 7. Алгоритм пошуку оптимального розв'язку основної задачі лінійного програмування

7.1. Алгоритм пошуку оптимального розв'язку за допомогою стандартних таблиць

Раніше було розглянуто основні складові (прийоми симплекс методу) пошуку оптимального опорного рішення задачі лінійного програмування, тобто задачі знаходження мінімуму показника ефективності:

$$W = c_0 - (\gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n) \rightarrow \min_{\substack{x_i \geq 0 \ (i=1, n) \\ y_j \geq 0 \ (j=1, m)}}$$

при виконанні рівнянь-обмежень

$$y_j = b_j - (a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n), \quad j = \overline{1, m}.$$

Покажемо на прикладі, як у зручній формі табличного алгоритму заміни змінних виконувати оптимізацію, тобто розв'язувати основу задачу лінійного програмування в цілому.

Приклад 7.1.

Розв'язати основну задачу лінійного програмування

$$W = 0 - (-x_1 + 2x_2 + x_3) \rightarrow \min_{\substack{x_{1,2,3} \geq 0 \\ y_{1,2,3,4} \geq 0}}$$

при виконанні рівнянь-обмежень

$$\begin{cases} y_1 = 2 - (x_1 + x_2 - 2x_3), \\ y_2 = 1 - (x_1 - x_2 + x_3), \\ y_3 = 5 - (x_2 + x_3), \\ y_4 = 2 - (2x_1 - x_2). \end{cases}$$

○ При $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 5, y_4 = 2$, тобто опорний розв'язок існує, але він не є оптимальним, тому що коефіцієнти при x_2 та x_3 , у виразі для W – додатні. Це означає, що за рахунок збільшення x_2 або x_3 можливо зменшити значення показника ефективності. Перейдемо до застосування алгоритму стандартних таблиць (табл. 7.1).

В першому рядку табл.7.1, що відображає вихідні данні, показник ефективності має додатні коефіцієнти при вільних змінних x_2 та x_3 . Тому можливо обрати будь який із стовбців в якості розв'язувального. Нехай це буде стовбець з x_3 , тобто x_3 виключимо із складу вільних змінних. Розв'язувальний елемент в обраному стовбці повинен буди додатний. Таких коефіцієнтів два: один у рядку з y_2 та інший у рядку з y_3 . Оберемо як розв'язувальний елемент той, для якого відношення вільного елемента до елемента обраного в якості розв'язувального найменше.

Таблиця 7.1

Вихідні дані

ПЕ БЗ	ВЕ		Коефіцієнти при вільних змінних			
			x_1	x_2	$x_3 \leftrightarrow y_2$	
W	0	-1	-1	2	1	-1
y_1	2	2	1	1	-2	2
$y_2 \leftrightarrow x_3$	1	1	1	-1	1	1
y_3	5	-1	0	1	1	-1
y_4	2	0	2	-1	0	0

Таблиця 7.2

Перша ітерація

ПЕ БЗ	ВЕ		Коефіцієнти при вільних змінних			
			x_1	$x_2 \leftrightarrow y_3$	y_2	
W	-1	-6	-2	3	-1	3/2
y_1	4	2	3	-1	2	-1/2
x_3	1	2	1	-1	1	-1/2
$y_3 \leftrightarrow x_2$	4	2	-1	2	-1	-1/2
y_4	2	2	2	-1	0	-1/2

В таблиці, отриманій після першої ітерації (табл. 7.2), у рядку «Показник ефективності» тільки при x_2 коефіцієнт додатний, тому x_2 необхідно вивести зі складу вільних змінних. В якості розв'язувального елемента вибираємо $a_{32} = 2$. В подальшому, для отримання другої та третьої ітерацій, застосуємо табличний алгоритм заміни базисних змінних (табл. 7.3 та 7.4).

Таблиця 7.3

Друга ітерація

ПЕ БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	y_3	$y_2 \leftrightarrow y_1$
W	-7 -2	-1/2 -5/6	-3/2 -1/6	1/2 -1/3
$y_1 \leftrightarrow y_2$	6 4	5/2 5/3	1/2 1/3	3/2 2/3
x_3	3 -2	1/2 -5/6	1/2 -1/6	1/2 -1/3
x_2	2 2	-1/2 5/6	1/2 1/6	-1/2 1/3
y_4	4 2	3/2 5/6	1/2 1/6	-1/2 1/3

Таблиця 7.4.

Третя ітерація

ПЕ БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	y_3	y_1
W	-9	-4/3	-5/3	-1/3
y_2	4	5/3	1/3	2/3
x_3	1	-1/3	1/3	-1/3
x_2	4	1/3	2/3	1/3
y_4	6	7/3	2/3	1/3

Як бачимо опорний розв'язок

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 1, y_1 = 0, y_2 = 4, y_3 = 0, y_4 = 6$$

є оптимальним, тому що всі коефіцієнти при вільних змінних у виразі для обчислення показника ефективності від'ємні. Остаточно отримуємо оптимальне(мінімальне) значення показника ефективності

$$W_{\min} = -9. \bullet$$

Зауваження 7.1. Якщо у кожному стовпці із додатнім коефіцієнтом у рядку показника ефективності не існує додатного елемента, то це означає, що не дивлячись на існування області допустимих розв'язків обмеженого розв'язку задача не має: при необмеженому збільшенні вільної змінної показник ефективності $W \rightarrow -\infty$.

Алгоритм пошуку оптимального розв'язку основної задачі лінійного програмування із використанням симплекс методу:

1. Якщо всі вільні елементи (виключаючи рядок W) у симплекс таблиці (стандартній таблиці) невід'ємні і при цьому у рядку W (без урахування вільного елемента) немає жодного додатного коефіцієнта, то оптимальний розв'язок досягнуто.
2. Якщо в рядку W серед коефіцієнтів вільних змінних є додатній, а у стовпці, що йому відповідає, немає жодного додатного коефіцієнту (елементу), то лінійна функція W не обмежена знизу і оптимального розв'язку не існує.
3. Якщо у стовпці є додатні коефіцієнти, то вільну змінну, яка відповідає цьому стовпцю необхідно поміняти місцями із тією базисною змінною, для якої відношення вільного елемента до обраного додатного коефіцієнту є найменшим.

Зауваження 7.2. При розв'язанні задачі лінійного програмування може виникнути ситуація коли при заміні змінних не відбувається зміни значення показника ефективності (вироджена задача лінійного програмування). Для припинення процедури пошуку W_{min} можливо використати ознаку того, що показник ефективності залишається незмінним після спеціально встановленої кількості циклів, або ознаку того, що показник ефективності вже неможливо зменшити, тому що немає додатних коефіцієнтів у рядку W симплекс таблиці.

Зауваження 7.3. При розв'язанні задачі лінійного програмування може виникнути зациклювання, суть якого полягає в тому, що після декількох замін змінних відбувається повернення до початкових значень опорного розв'язку та показника ефективності. Для подолання зациклювання необхідно після першого повернення до початкових умов оптимізації замінити розв'язувальний елемент.

Приклад 7.2. Розв'язати основну задачу лінійного програмування

$$W = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min \begin{matrix} x_{1,2,3,4} \geq 0 \\ y_{1,2,3} \geq 0 \end{matrix}$$

при виконанні рівнянь-обмежень

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = -x_2 + x_3 + 2, \\ y_3 = x_3 + x_4 + 1. \end{cases}$$

○ 1) Перейдемо до стандартної форми задачі лінійного програмування:

$$W = 0 - (-2x_1 + x_2) \rightarrow \min_{\substack{x_{1,2,3,4} \geq 0 \\ y_{1,2,3} \geq 0}}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 - (-x_1 + x_2), \\ y_2 = 2 - (x_2 - x_3), \\ y_3 = 1 - (-x_3 - x_4). \end{cases}$$

2) Із стандартної форми задачі лінійного програмування (див. п.1) випливає, що вільні коефіцієнти невід'ємні. Тобто при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ має місце опорний розв'язок. Таким чином, опорний розв'язок шукати не потрібно. Переходимо до алгоритму покращення значень показника ефективності на опорних розв'язках, тобто до алгоритму пошуку оптимального розв'язку за допомогою стандартних таблиць (табл. 7.5 та 7.6).

Таблиця 7.5

Вихідні дані

ПЕ БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних			
		x_1	$x_2 \leftrightarrow y_1$	x_3	x_4
W	0 0	-2 1	1 -1	0 0	0 0
$y_1 \leftrightarrow x_2$	0 0	-1 -1	1 1	0 0	0 0
y_2	2 0	0 1	1 -1	-1 0	0 0
y_3	1 0	0 0	0 0	-1 0	-1 0

Таблиця 7.6

Перша ітерація

ПЕ БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних			
		x_1	y_1	x_3	x_4
W	0	-1	-1	0	0
x_2	0	-1	1	0	0
y_2	2	1	-1	-1	0
y_3	1	0	0	-1	-1

Як бачимо:

1. Показник ефективності не змінився і дорівнює $W = 0$;
2. У рядку із W у таблиці вже не існує додатних коефіцієнтів.

Тому робимо висновок, що оптимальний розв'язок досягнуто в точці

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y_1 = 0, x_2 = 2, y_3 = 1. \bullet$$

7.2. Розв'язання задачі лінійного програмування із використанням системи комп'ютерної математики Matlab

Постановка задачі:

$$W = f^T \cdot X \rightarrow \min_{X \in G},$$

де ОДР G задана системою нерівностей

$$\begin{cases} A \cdot X \leq b, \\ A_{eq} \cdot X = b_{eq}, \\ lb \leq X \leq Ub. \end{cases}$$

у якій прийняті наступні позначення:

X – вектор змінних, за якими виконується оптимізація;

f – матриця-стовпець коефіцієнтів показника ефективності;

A – прямокутна матриця;

b – матриця-стовпець вільних елементів (коефіцієнтів) у обмеженнях нерівностях;

A_{eq} – прямокутна матриця;

b_{eq} – матриця-стовпець вільних елементів (коефіцієнтів) у обмеженнях рівностях;

lb, Ub – матриці-стовпці покомпонентних обмежень вектора X .

Методика застосування функції $linprog()$:

% виконати математичну постановку прикладної задачі;

% задати матриці $f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, Ub$;

% звернення до функції розв'язок $linprog()$ та отримання результату

$$[X, W] = linprog(f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, Ub)$$

% якщо якесь із обмежень не задається, то замість цих аргументів при використанні функції $linprog()$ задають порожні масиви у вигляді [].