Лекція 6. Алгоритм пошуку опорних розв‘язків основної задачі лінійного програмування

6.1. Табличний алгоритм заміни базисних змінних (стандартні таблиці)

Як було показано раніше, прийоми реалізації симплекс-методу розв’язання задачі лінійного програмування базуються на багатократних перераховуваннях системи рівнянь обмежень основної задачі лінійного програмування відносно нових вільних та базисних змінних. З метою прискорення цих розрахунків розглянемо спеціальний табличний алгоритм. Припустимо, що необхідно виконати мінімізацію показника ефективності, представленого лінійною функцією

$$W = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \to \min_{x_{1,2,3} \geq 0}$$

за умови виконання обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3. \end{cases}$$

Представимо цю задачу у вигляді основної задачі лінійного програмування у формі зручній для застосування стандартизованого табличного алгоритму:

$$W = c_0 - \left(\left(-c_1\right)x_1 + \left(-c_2\right)x_2 + \left(-c_3\right)x_3\right) = c_0 - \left(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3\right) \to \min_{x_{1,2,3} \geq 0}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\right), \\ y_2 = b_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\right), \\ y_3 = b_3 - \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\right), \end{cases}$$

де $\gamma_1 = -c_1$, $\gamma_2 = -c_2$, $\gamma_3 = -c_3$.

Складемо таблиці (табл. 6.1 та 6.2), в яких позначено: ПЕ - показник ефективності; БЗ – базисні змінні; ВЕ – вільний елемент.

Таблиця 6.1

Вихідне представлення інформації

ПЕ, БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	x_2	x_3
W	c_0	γ_1	γ_2	γ_3
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
y_3	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Припустимо, що необхідно виконати заміну базисної змінної y_3 на x_2 і, навпаки, вільної змінної x_2 на y_3 . В аналітичному вигляді така заміна змінних виконується із використанням рівняння:

$$x_2 = \frac{b_3}{a_{32}} - \left(\frac{a_{31}}{a_{32}} \cdot x_1 + \frac{1}{a_{32}} \cdot y_3 + \frac{a_{33}}{a_{32}} \cdot x_3 \right),$$

в якому елемент a_{32} називають ***розв'язувальним елементом*** і, відповідно, у стандартизованій таблиці рядок та стовпець називають ***розв'язувальними рядком*** та ***стовпцем*** (див. табл. 6.2). Якщо вираз для x_2 підставити у формули для обчислення W , y_1, y_2, то отримаємо таблицю перерахунку коефіцієнтів рівнянь обмежень для нових базисних змінних y_1, y_2, x_2 та нових вільних змінних x_1, y_3, x_3 (див. табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Формули перерахунку коефіцієнта після заміни змінних

ПЕ БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		x_1	y_3	x_3
W	$c_0 + b_3\left(-\frac{\gamma_2}{a_{32}}\right)$	$\gamma_1 + a_{31}\left(-\frac{\gamma_2}{a_{32}}\right)$	$-\frac{\gamma_2}{a_{32}}$	$\gamma_3 + a_{33}\left(-\frac{\gamma_2}{a_{32}}\right)$
y_1	$b_1 + b_3\left(-\frac{a_{12}}{a_{32}}\right)$	$a_{11} + a_{31}\left(-\frac{a_{12}}{a_{32}}\right)$	$-\frac{a_{12}}{a_{32}}$	$a_{13} + a_{33}\left(-\frac{a_{12}}{a_{32}}\right)$
y_2	$b_2 + b_3\left(-\frac{a_{22}}{a_{32}}\right)$	$a_{21} + a_{31}\left(-\frac{a_{22}}{a_{32}}\right)$	$-\frac{a_{22}}{a_{32}}$	$a_{23} + a_{33}\left(-\frac{a_{22}}{a_{32}}\right)$
x_2	$b_3\left(\frac{1}{a_{32}}\right)$	$a_{31}\left(\frac{1}{a_{32}}\right)$	$\frac{1}{a_{32}}$	$a_{33}\left(\frac{1}{a_{32}}\right)$

В загальному випадку алгоритм перетворення x_j в y_i і навпаки із використанням стандартної таблиці складається з наступних дій:

1. Виділення в стандартній таблиці розв'язувального елемента a_{ij}. Обчислення зворотної величини $\lambda = \dfrac{1}{a_{ij}}$. Для наочності обчислень пропонується записати λ у правому нижньому куті фрагменту таблиці, де розташований розв'язувальний елемент.
2. Множення усіх елементів розв'язувального рядка (крім a_{ij}) на λ. Результат записується у відповідному фрагменті таблиці справа знизу.
3. Множення усіх елементів розв'язувального стовпця (окрім a_{ij}) на $-\lambda$. Результат записується у відповідному фрагменті таблиці справа знизу.

4. Виділення у розв'язувальному рядку усіх попередніх, а у розв'язувальному стовпці – усіх нових елементів за виключенням самого розв'язувального елемента a_{ij}.
5. Обчислення добутку нового елемента розв'язувального стовпця на попередній елемент розв'язувального рядка. Для всіх попередніх елементів таблиці окрім тих, що розташовані у розв'язувальних рядку та стовпці. Запис добутку у відповідний фрагмент таблиці.
6. Формулювання остаточного результату:

   1) заміна x_j на y_i і навпаки;

   2) залишити у розв'язувальних стовпці та рядку лише нижні елементи фрагментів таблиці;

   3) заміна інших елементів таблиці сумою попередніх чисел та результатів розрахунку згідно пункту 5.

Приклад 6.1. Необхідно виконати заміну змінних у наступній задачі лінійного програмування:

$$W = -x_1 - x_3 + 2 \to \min_{x_{1,2,3} \ge 0}$$

при виконанні умов:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 5 \ge 0, \\ 2x_1 - x_2 + 1 \ge 0, \\ 2x_2 - x_3 - 1 \ge 0. \end{cases}$$

❍Переформулюємо критерій та обмеження нерівності у вигляді:

$$W = 2 - (x_1 + x_3) \to \min_{\substack{x_{1,2,3} \ge 0 \\ y_{1,2,3} \ge 0}}$$

$$\begin{cases} y_1 = -5 - \left(-x_1 + x_2 - 2x_3\right), \\ y_2 = 1 - \left(-2x_1 + x_2\right), \\ y_3 = -1 - \left(-2x_2 + x_3\right). \end{cases}$$

Представимо вихідні дані у вигляді таблиці 7.3 та виконаємо заміну змінних, наприклад y_2 на x_1 у рядку і x_1 на y_2 у стовпчику, із використанням наведеного вище алгоритму перетворення x_j в y_i і навпаки.

Таблиця 6.3

Вихідні дані

ПЕ БЗ	ВЕ		Коефіцієнти при вільних змінних					
			$x_1 \leftrightarrow y_2$		x_2		x_3	
W	2	$^1/_2$	1	$^1/_2$	0	$^1/_2$	1	0
y_1	-5	$-^1/_2$	-1	$-^1/_2$	1	$-^1/_2$	-2	0
$y_2 \leftrightarrow x_1$	1	$-^1/_2$	-2	$-^1/_2$	1	$-^1/_2$	0	0
y_3	-1	0	0	0	-2	0	1	0

Результат заміни змінних представлено у табл.6.4.

Таблиця 6.4

Результат заміни змінних

ПЕ БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		y_2	x_2	x_3
W	5/2	1/2	1/2	1
y_1	-11/2	-1/2	1/2	-2
x_1	-1/2	-1/2	-1/2	0
y_3	-1	0	-2	1

●

6.2. Алгоритм пошуку опорного розв‘язку за допомогою стандартних таблиць

Основна задача лінійного програмування у стандартній формі має вигляд:

$$W = c_0 - \left(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots \gamma_n x_n\right) \to \min_{\substack{x_i \geq 0 \left(i=\overline{1,n}\right) \\ y_j \geq 0 \left(j=\overline{1,m}\right)}}$$

за умови виконання обмежень рівностей:

$$y_j = b_j - \left(a_{j1} + a_{j2} + \dots + a_{jn} x_n\right),\ j = \overline{1,m}\,.$$

В кожній вершині області допустимих розв‘язків розташовані опорні розв‘язки, для яких характерним є те, що хоча б n змінних дорівнюють 0, а інші змінні невід’ємні.

Покладемо $x_i = 0 \left(i = \overline{1,n}\right)$, $y_j = b_j \left(j = \overline{1,m}\right)$. Тоді ознакою того, що записаний вище розв‘язок

$$\begin{cases} x_i = 0 \ \left(i = \overline{1,n}\right), \\ y_j = b_j \ \left(j = \overline{1,m}\right) \end{cases}$$

є опорним, слід вважати невід'ємність вільних елементів $b_j \geq 0 \left(j = \overline{1,m}\right)$.

Якщо ця умова не виконується, то необхідно перейти від розв'язку, що не задовольняє область допустимих розв'язків до опорного. Алгоритм пошуку опорного розв'язку повинен призводити на кожній ітерації або до зменшення кількості від'ємних вільних коефіцієнтів обмежень рівностей, які задають рівняння для пошуку базисних змінних, або зменшувати модуль цих від'ємних коефіцієнтів, і тим самим, поступово, наближати базисні змінні до границі області допустимих розв'язків.

Розглянемо алгоритм пошуку опорного розв'язку, який використовує стандартні таблиці.

Прийом 1. Дослідити область допустимих розв'язків на існування.

Знайти в стандартній таблиці від'ємний вільний елемент для будь-якої базисної змінної. Якщо в знайденому рядку немає від'ємних коефіцієнтів при вільних змінних, то це ознака відсутності розв'язку тому, що

$$y_j = b_j - \left(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n\right) < 0$$

при $b_j < 0$ та $x_i \geq 0$, а змінна y_j повинна бути невід'ємною. Виконати умову невід'ємності неможливо.

Прийом 2. Пошук розв'язувального елементу.

Припустимо, що у рядку із від'ємним вільним коефіцієнтом є від'ємний коефіцієнт при деякій вільній змінній. Розглядаючи стовпець з від'ємним коефіцієнтом при деякій вільній змінній, знаходимо в ньому елемент однакового з вільним коефіцієнтом знаку, але такий, щоб відношення вільного коефіцієнта до нього було мінімальним. Цей елемент і є розв'язувальним.

Прийом 3. Виконуємо заміну змінних із застосуванням стандартних таблиць.

Розглянемо на прикладі застосування алгоритму пошуку опорного рішення із використанням стандартних таблиць.

Приклад 6.2. Знайти, якщо він існує, опорний розв'язок основної задачі лінійного програмування із наступними рівняннями обмеженнями:

$$\begin{cases} y_1 = 1 - \left(-x_1 - 2x_2 + x_3\right), \\ y_2 = -5 - \left(-2x_1 + x_2 - x_3\right), \\ y_3 = 2 - \left(x_1 + x_2\right), \\ y_4 = 1 - \left(-x_2 + x_3\right). \end{cases}$$

❍Запишемо вихідні дані у вигляді симплекс таблиці.

Таблиця 6.5

Вихідні дані

БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		$x_1 \leftrightarrow y_3$	x_2	x_3
y_1	1 / 2	-1 / 1	-2 / 1	1 / 0
y_2	-5 / 4	-2 / 2	1 / 2	-1 / 0
y_3	2 / 1	1 / 1	1 / 1	0 / 0
y_4	1 / 0	0 / 0	-1 / 0	1 / 0

Обираємо другий рядок та перший стовпець, тому що у другому рядку є від'ємний коефіцієнт -2 та від'ємний вільний коефіцієнт -5. Зупинимось на стовпчику із коефіцієнтом -2 та обчислимо відношення

$$\frac{-5}{-2} = 2{,}5 \geq \frac{2}{1} = 2,$$

тобто в якості розв'язувального елементу вибираємо $a_{31} = 1$.

Заповнимо таблицю 7.6, яка буде таблицею першої ітерації до опорного розв'язку.

Повторно застосовуємо алгоритм пошуку опорного розв'язку із використанням стандартних таблиць (див. табл. 6.6).

Таблиця 6.6

Перша ітерація

БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		y_3	x_2	$x_3 \leftrightarrow y_2$
y_1	3 / -1	1 / 2	-1 / 3	1 / 1
$y_2 \leftrightarrow x_3$	-1 / 1	2 / -2	3 / -3	-1 / -1
x_1	2 / 0	1 / 0	1 / 0	0 / 0
y_4	1 / -1	0 / 2	-1 / 3	1 / 1

Заповнимо табл.6.7, яка буде таблицею другої ітерації до опорного розв'язку

Таблиця 6.7

Друга ітерація

БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		y_3	x_2	y_2
y_1	2	3	2	1
x_3	1	-2	-3	-1
x_1	2	1	1	0
y_4	0	2	2	1

В табл. 6.7 всі вільні елементи невід'ємні. Опорний розв'язок знайдено.●

Приклад 6.3. Знайти, якщо він існує, опорний розв'язок задачі лінійного програмування із наступними рівняннями обмеженнями:

$$\begin{cases} y_1 = -4 - \left(-x_1 + 2x_2\right), \\ y_2 = -3 - \left(x_1 - x_2 + x_3\right), \\ y_3 = -10 - (2x_1 - x_2 + x_3), \\ y_4 = -2 - \left(-x_1 + x_2\right). \end{cases}$$

❍ Обираємо, наприклад, перший рядок та перший стовпець із від'ємним коефіцієнтом (табл. 6.8).

Як на початку розв'язання задачі лінійного програмування, так і в процесі отримання кожної наступної ітерації контролюємо виникнення умови, коли вільний елемент будь-якої базисної змінної від'ємний, а серед коефіцієнтів при вільних змінних немає від'ємного.

Таблиця 6.8

Вихідні дані

БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		$x_1 \leftrightarrow y_4$	x_2	x_3
y_1	-4 / 2	-1 / -1	2 / -1	0 / 0
y_2	-3 / -2	1 / 1	-1 / 1	1 / 0
y_3	-10 / -4	2 / 2	-1 / 2	1 / 0
y_4	-2 / 2	-1 / -1	1 / -1	0 / 0

Таблиця 6.9

Перша ітерація

БЗ	ВЕ	Коефіцієнти при вільних змінних		
		y_4	x_2	x_3
y_1	-2	-1	1	0
y_2	-5	1	0	1
y_3	-14	2	1	1
x_1	2	-1	-1	0

Так в рядках 2 та 3 маємо:

$$y_2 = -5 - \left(y_4 + x_3\right) < 0 \ ,$$

$$y_3 = -14 - \left(2y_4 + x_2 + x_3\right) < 0 \ \forall x_2, x_3 \geq 0, y_4 \geq 0.$$

Тобто розв‘язку, який належить ОДР за ознакою невід’ємності управляючих змінних, не існує. Отже, область допустимих розв‘язків – порожня множина. Як бачимо, з’ясування питання про існування допустимих розв‘язків відбувається в процесі пошуку опорного розв‘язку.●