Лекція 3. Типові задачі математичного програмування

3.1. Приклади типових задач математичного програмування

Кожна з наведених нижче задач має свою назву, що відображає її первинне походження, яке в багатьох випадках не має ніякого відношення у прямій постановці до телекомунікаційних систем та засобів телекомунікацій, але прикладна привабливість цих задач для телекомунікацій полягає в тому, що більшість телекомунікаційних задач, які розв'язуються на рівні бізнесуправління, може бути зведена до цих класичних прикладів. Типові приклади виконують як функцію прототипа-аналога так і накопичувача знань щодо об'єктно-орієнтованого способу розв'язання конкретних прикладних телекомунікаційних задач. Зводячи технічні задачі до прикладів, що будуть наведені, ми отримаємо вже відпрацьований ефективний математичний апарат та алгоритмічний інструмент розв'язання своїх специфічних телекомунікаційних задач, тобто ці приклади виконують функцію підказки, що вказують прийоми формалізації специфічних актуальних телекомунікаційних задач.

3.1.1. Задача про розкрій

На фірмі, що спеціалізується на виробництві корпусів для системних блоків, листи металу можуть розкроюватися декількома способами. Якщо лист розкроїти за j-м способом $\left(j=\overline{1,n}\right)$, то отримаємо a_{ij} корпусів i-го виду $\left(i=\overline{1,m}\right)$, при цьому величина відходів з одного листа дорівнює $c_j\left(\text{м}^2\right)$.

Необхідно знайти, яку кількість листів металу необхідно розкроювати за кожним із способів для того, щоб отримати корпусів i-го виду не менше ніж b_i із мінімальною кількістю відходів.

Якщо через x_j позначити кількість листів металу, розкроєних j-м способом, то математична модель та постановка задачі набуває вигляду:

$$W=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{X\in G}, \tag{3.1}$$

де ОДР G являє собою умови стосовно виконання обмежень на виробництво корпусів j-го типу:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{3.2}$$

та на x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, які випливають із фізичного змісту цих змінних:

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{N}_0,\ X=\left[x_1,\ldots,x_n\right]^T \ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{3.3}$$

3.1.2. Задача виробничого планування або задача оптимального використання ресурсів виробництва

Для виробництва продукції j-го виду $\left(j=\overline{1,n}\right)$ фірма має обмежені ресурси (виробничі приміщення, спеціалізовані прилади, оргтехніка, витратні матеріали, кількість фахівців, фінансові ресурси тощо) b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Витрати ресурсів i-го виду на виготовлення одиниці продукції j-го виду дорівнюють a_{ij}.

Необхідно знайти скільки та якої продукції виробляти, щоб отримати максимальний прибуток. Вважаємо, що збут продукції кожного виду відбувається повністю.

Якщо позначити через x_j, P_j відповідно об'єм продукції j-го виду та прибуток від його реалізації, то математична модель постановки задачі набуває вигляду

$$W=\sum_{j=1}^{n}P_j x_j \to \max_{X\in G} \tag{3.4}$$

за умови виконання обмежень G по ресурсах:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{3.5}$$

із урахуванням фізичного змісту об'ємів виробництва

$$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbb{N}_0,\ X=\left[x_1,\ldots,x_n\right]^T \ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{3.6}$$

3.1.3. Задачі про суміші або задача про дієту

Сучасний фітотерапевтичний центр виконує лікувальні роботи на основі препаратів природного походження. Кожен вид рослини характеризується відповідним вмістом лікувальних елементів. Відомо вміст i-го елемента в одиниці j-го рослинного препарату a_{ij} $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$, а також вартість c_j одиниці препарату j-го виду і добова мінімальна лікувальна доза i-го препарату b_i.

Необхідно скласти лікувально-профілактичний раціон мінімальної вартості. Якщо позначити через x_j кількість препарату j-го виду, що включено до складу раціону, то математична модель та постановка задачі набувають вигляду:

$$W=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \to \min_{X\in G} \tag{3.7}$$

за умови виконання обмежень G на добову дозу

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \ge b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{3.8}$$

та фізичний зміст кількості препарату

$$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{R}\ \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{3.9}$$

3.1.4. Задача про призначення

Фірма, що займається гарантійним обслуговуванням та ремонтом комп'ютерної техніки має у своєму розпорядженні n ремонтних бригад. Відома продуктивність c_{ij} кожної i-ої бригади $\left(i = \overline{1, m}\right)$ при виконанні j-ої роботи.

Потрібно так розподілити бригади за роботами, щоб досягти максимальної сумарної виробничої потужності. Зрозуміло, що i-та бригада може виконувати в деякому інтервалі часу лише одну задану роботу.

Таблиця 3.1.

Пояснення щодо можливого робочого завантаження бригад

Номер бригади	Номер роботи							
	1	2	$\cancel{3}$	4	$\cancel{5}$	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0

Якщо нас цікавить тільки заданий інтервал часу, то немає сенсу розглядати ті роботи, що протягом всього інтервалу часу не виконуються. Або розглядати ті бригади, на які в даному інтервалі часу роботи не вистачило (табл. 4.1), тобто при побудові математичної моделі задачі вважаємо, що кількість робіт, які необхідно виконати дорівнює кількості бригад (всі роботи обов'язково виконуються, всі бригади працюють) (табл. 3.2).

Математичну модель описаного явища можливо представити матрицею (див. табл. 3.2).

Відповідно до змісту задачі про призначення, в окремому стовпці, наприклад третьому, чи в окремому рядку, наприклад другому, може бути лише одна одиниця, яку інтерпретуємо як призначення другої бригади для виконання роботи 3-го типу.

Таблиця 3.2.

Побудова матриці математичної моделі

Номер бригади	Номер роботи j					
	1	2	…	$n-2$	$n-1$	n
1	1	0	…	0	0	0
2	0	1	…	0	0	0
…	…	…	…	…	…	…

$n-2$	0	0	0	0	0	1
$n-1$	0	0	0	0	1	0
n	0	0	0	1	0	0

Остаточно математична модель та постановка задачі набувають вигляду:

$$W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max_{X \in G} \tag{3.10}$$

за умови виконання обмежень G:

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \tag{3.11}$$

де $X = \left[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{nn}\right]^T$ – кількість компонент вектора дорівнює n^2.

3.1.5. Задача оптимального розміщення

Крупною телекомунікаційною компанією укладені договори на поставку обладнання замовникам в заданому асортименті, об'ємі та строках. Для виконання договірних зобов'язань керівництво компанії опрацьовує заходи щодо розширення виробництва на існуючих підприємствах за рахунок їх реконструкцій, а також завдяки будівництву нових виробничих приміщень.

Необхідно визначити об'єми виробництва продукції. На існуючих підприємствах і тих, що реконструюються та будуються, а також обсяги поставок продукції від підприємств-постачальників до споживачів і при цьому сумарні витрати на виробництво і доставку продукції повинні бути мінімальними. Побудову математичної моделі почнемо із введення та пояснення фізичного змісту наступних позначень:

i – вид продукції, яка виробляється $\left(i = \overline{1,m}\right)$;

j – номер підприємства, яке виробляє продукцію $\left(j = \overline{1,n}\right)$;

k – номер споживача продукції $\left(k = \overline{1,l}\right)$;

b_{ij} – об'єм продукції i-го виду, який виробляє j-те підприємство протягом заданого часу (виробнича потужність підприємства);

c_{ij} – вартість виробництва продукції i-го виду, виробленої j-им підприємством;

p_{ik} – об'єм поставки продукції i-го виду k-му споживачу згідно договорів;

x_{ij} – об'єм виробництва продукції i-го виду на j-му підприємстві;

x_{ijk} – об'єм поставки продукції i-го виду, виробленого j-им підприємством k-му споживачу;

W – сумарні виробничі та транспортні витрати, тобто показник ефективності.

Математична модель і постановка задачі набувають вигляду:

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} c_{ijk} x_{ijk} \to \min_{X \in G} \tag{3.12}$$

за умови виконання обмежень G, які накладаються на виробничі потужності кожного підприємства:

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ijk} \le b_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right), \tag{3.13}$$

на баланс виробництва і споживання продукції:

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{l} x_{ijk} \qquad \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right) \tag{3.14}$$

на задоволення запиту споживачів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = p_{ik} \qquad \left(i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,l}\right) \tag{3.15}$$

та невід'ємність об'єму поставок і виробництва продукції:

$$x_{ij} \ge 0,\ x_{ijk} \ge 0 \qquad \left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,l}\right), \tag{3.16}$$

$$X = \left[\overbrace{x_{11},\ldots,x_{ij},\ldots,x_{mn}}^{m\times n}, \overbrace{x_{111},\ldots,x_{mnl}}^{m\times n\times l}\right]^T.$$

3.1.6. Задача про розподіл ресурсів

В телекомунікаційній компанії є технічні і людські ресурси $R_1, R_2, \ldots, R_m$ (наприклад, кількість каналів та серверів на їх обслуговування, кількість бригад монтажу та ремонту обладнання, кількість бригад технологічної підтримки абонентів і т.д.) для надання телекомунікаційних послуг у кількості відповідно $b_1, \ldots, b_m$ одиниць. За допомогою цих ресурсів можливо надати послуги $T_1, \ldots, T_n$ (голосовий зв'язок, визначення координат мобільної станції, можливість прийому зображень у реальному часі, можливість забезпечити безпроводовий інтернет і т.д.). Для забезпечення послуги T_j необхідно a_{ij} одиниць ресурсу R_i $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$. Кожна одиниця ресурсу R_i коштує d_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$. Кожну послугу T_j можливо реалізувати за ціною c_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$. На кожний вид послуги є свій запит: відомо, що ринок телекомунікаційних послуг може скористатись не більше, ніж K_j одиницями послуги T_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$. Задача полягає в тому, щоб знайти які послуги і в якій кількості реалізувати для отримання максимального прибутку.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – кількісний вираз послуги відповідно $T_1, T_2, \ldots, T_n$, які заплановано «виробити».

Умови запиту та фізичний зміст накладають на x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ обмеження $0 \le x_j \le K_j$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Обмеження виду

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right)$$

формалізують вимогу не перевищення наявного запасу відповідного ресурсу.

Обчислимо прибуток L в залежності від елементів рішення $x_1, \ldots, x_n$. Собівартість одиниці послуги T_j дорівнює

$$S_j = a_{1j} d_1 + a_{2j} d_2 + \ldots + a_{nj} d_n = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

Чистий прибуток q_j, який буде отримано від реалізації одиниці послуги T_j дорівнює різниці між її ціною для продажу c_j та собівартістю S_j:

$$q_j = c_j - S_j \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Загальний чистий прибуток від реалізації усіх послуг дорівнює значенню виразу:

$$W = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \ .$$

Математична модель і постановка задачі набувають вигляду:

$$W = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \to \max_{X \in G} \tag{3.17}$$

за умови виконання обмежень G:

$$\begin{gathered} 0 \le x_j \le K_j \ \left(j = \overline{1,n}\right), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right), \end{gathered} \tag{3.18}$$

$X = \left[x_1, \ldots, x_n\right]^T$.

Цей запис означає: знайти такі невід'ємні та обмежені зверху значення $x_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, при яких задовольняються ресурсні обмеження та максимізується показник ефективності.

3.1.7. Задача «про перевезення»

Описова постановка задачі полягає в тому, що фірма, яка працює за технологією інтернет-магазину має на всій території України m складських приміщень $c_1,\ldots,c_m$ та n пунктів споживання продукції $\Pi_1,\ldots,\Pi_n$.

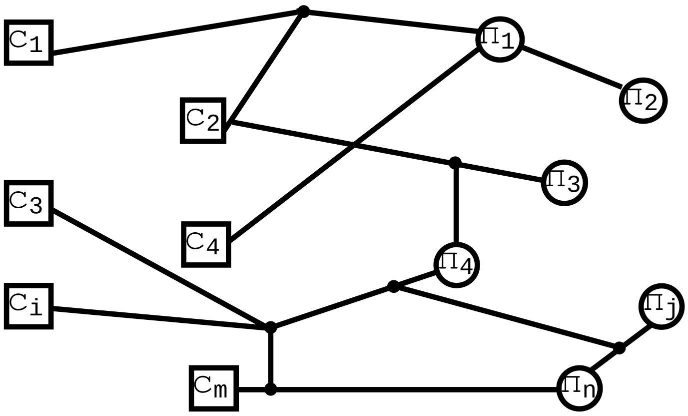

Рис. 3.1. Схема розташування складів $c_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ та споживачів $\Pi_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ та мережі транспортних сполучень

Суть задачі полягає у складанні плану перевезень із складів $c_i\left(i = \overline{1,m}\right)$ в пункти споживання $\Pi_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ деякого телекомунікаційного обладнання. На складах $c_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ є запаси цього обладнання у кількості a_i одиниць. Користувачі послуг Π_j інтернет-магазину надали заявок відповідно b_j одиниць обладнання. Заявки можливо виконати, якщо сума усіх заявок не перевищує суму усіх запасів $\sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Склади пов'язані із пунктами споживання $\Pi_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ мережею доріг із визначеними тарифами перевезення. Вартість перевезення одиниці товару зі складу c_i у пункт споживання Π_j дорівнює $v_i \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$. Потрібно скласти план перевезень, тобто вказати з якого складу в які пункти і яку кількість обладнання необхідно спрямувати таким чином, щоб заявки були виконані, а загальні витрати на всі перевезення були мінімальні.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо x_{ij} – кількість одиниць обладнання, яка спрямовується зі складу c_i у пункт Π_j.

Розв’язок (план перевезень) складається із $n \times m$ чисел, які представимо у вигляді прямокутної матриці:

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = \left\{x_{ij}\right\}\Big|_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Потрібно обрати такі невід’ємні значення змінних x_{ij}, що є елементами матриці перевезень P, щоб були виконані наступні умови:

1. Ємність складу перевищувати не можна (це означає, що загальна кількість обладнання, яке було взяте із кожного складу не повинна перевищувати його запасів на цьому складі):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \left(i = \overline{1,m}\right).$$

2. Заявки, сформовані споживачами, повинні бути виконаними:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \left(j = \overline{1,n}\right).$$

3. Загальна вартість перевезень повинна обчислюватись за формулою:

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij}.$$

Постановка задачі формулюється наступним чином: знайти такий план перевезень P, щоб вартість W була мінімальною і всі обмеження були виконаними, за умови, коли сума усіх заявок дорівнює сумі усіх запасів

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

тобто з кожного складу буде вивезено усе, що на ньому є, і нерівність пункту 1 перетворюється у рівність:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Постановка задачі математичного програмування в цьому випадку набуває вигляду:

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij} \to \min_{X \in G} \tag{3.19}$$

за умови виконання обмежень G:

$$\begin{gathered} x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \left(i = \overline{1,m}\right), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \left(j = \overline{1,n}\right), \\ \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i\ . \end{gathered} \tag{3.20}$$

Ця задача ще має назву «транспортна задача із правильним балансом».

3.1.8. Задача «про виробництво складного обладнання»

Протягом часу T планується виробництво складного телекомунікаційного обладнання, кожен компонент якого складається із n елементів $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Замовлення на виготовлення цих елементів можливо розмістити на m різних підприємствах $\text{П}_1, \text{П}_2, \ldots, \text{П}_m$. За інтервал часу T на підприємстві П_i можливо виробити a_{ij} елементів типу E_j $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$.

Зважаючи на те, що нас цікавить лише певний комплект елементів, який дозволяє виконати повну зборку відповідного пристрою, сформулюємо наступну мету операції: необхідно розподілити замовлення по підприємствах таким чином, щоб кількість повних комплектів, виготовлених за час T була максимальною. Розподілити замовлення означає визначити для кожного підприємства П_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ частку часу x_{ij} від загального часу T, яку це підприємство буде працювати виробляючий елемент E_j $(j = \overline{1,n})$.

Враховуючи, що

$$x_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{T},$$

де τ_{ij} – час, який повинно витратити підприємство П_i на виробництво елемента E_j, а також той факт, що

$$\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \tau_{\mathrm{ij}} \leq \mathrm{T}$$

отримаємо обмеження на змінну x_{ij}:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Підкреслимо, що при виконанні загальної задачі враховуються лише повні комплекти, що складаються із усіх елементів $E_1,\ldots,E_n$. Тому визначимо кількість повних комплектів, які зможуть виробляти усі підприємства разом за час T. Зрозуміло, що загальна кількість елементів типу E_j обчислюється за виразом:

$$N_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Показник ефективності – це кількість повних комплектів, що дорівнює кількості елементів, яких вироблено найменше:

$$W = \min_{j \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}.$$

Математична постановка задачі набуває вигляду:

$$W = \min_{j \in \{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \to \max_{X \in G}. \tag{3.21}$$

при виконанні обмежень:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \left(i = \overline{1,m}\right), \\ &x_{ij} \ge 0 \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \end{aligned} \tag{3.22}$$

де $X = \left[x_{11},\ldots,x_{ij},\ldots,x_{mn}\right]^T$.

Із наведених прикладів видно, що більшість задач сформульовані із використанням лише лінійних функцій від елементів рішення як у показнику ефективності, так і в обмеженнях. Нагадаємо, що за цими елементами необхідно було знайти максимум або мінімум показника ефективності. Такі задачі в математичному програмуванні виділені в окремий клас задач, що отримав назву **задачі лінійного програмування**. Перейдемо до їх детального вивчення.