

Лекція 2. Предмет математичного програмування

2.1. Загальна задача математичного програмування

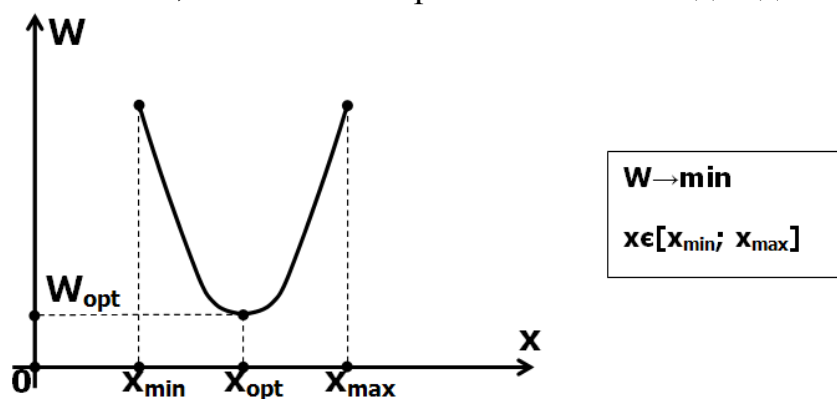
Послідовність розв'язання задачі пошуку найкращих дій за заданим показником ефективності W (задача дослідження операцій) складається з наступних етапів:

- 1) якісна (неформальна, змістова, вербальна) постановка задачі дослідження операцій;
- 2) побудова математичної моделі;
- 3) математична постановка задачі;
- 4) розробка методу розв'язання задачі (метод оптимізації);
- 5) розробка методики та алгоритму реалізації запропонованого методу;
- 6) розробка комп'ютерної програми;
- 7) розрахунок (чисельний експеримент), імітаційне моделювання;
- 8) інтерпретація отриманого результату.

Загальною *задачею математичного програмування* є знаходження глобального екстремуму показника ефективності W на області допустимих значень G . Тобто математичне програмування дозволяє виконати 4) та 5) етапи задачі дослідження операцій.

Окрім терміну математичне програмування, ще використовують термін математична модель оптимізації, або математична модель розв'язання задач на екстремум. Набір змінних $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, який задовольняє обмеженням G , називають *планом задачі математичного програмування*.

Система обмежень повинна бути сумісною, інакше множина планів буде порожньою множиною. Множина планів може бути як обмеженою, так і не обмеженою. План, що надає показнику ефективності оптимальне значення називається оптимальним, оптимальний розв'язок не завжди єдиний (рис. 2.1).



а) точка оптимуму єдина

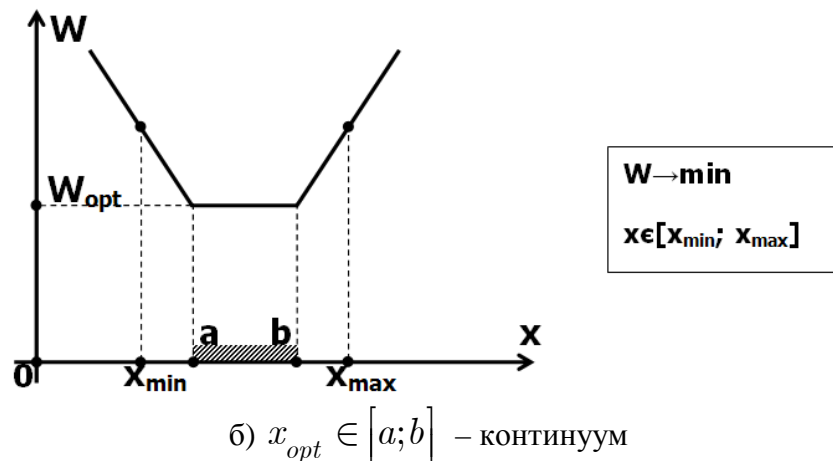


Рис. 2.1. Графічна ілюстрація можливостей існування єдиного та безлічі оптимальних планів

2.2. Класифікація задач математичного програмування

Задачі математичного програмування поділяються на класичні та некласичні.

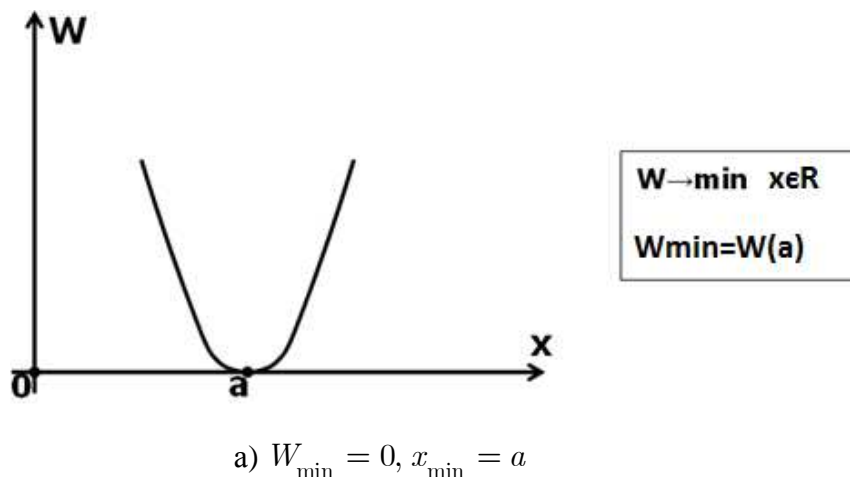
Ознаками віднесення задач математичного програмування до класичних є вимоги:

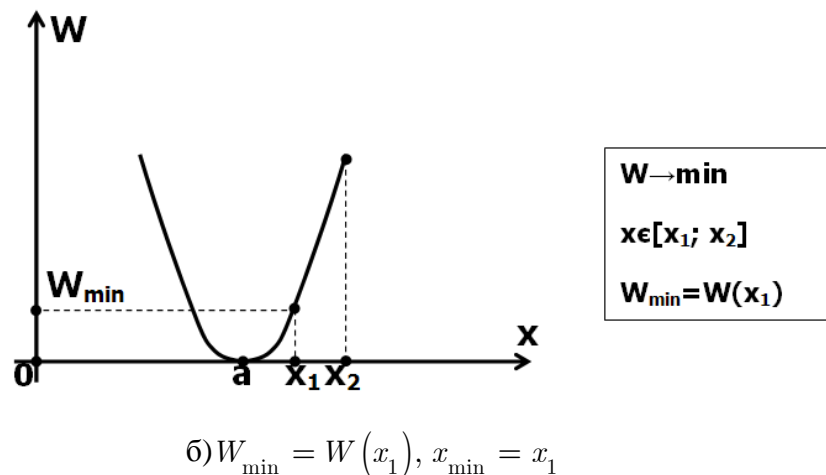
- неперервності показника ефективності та обмежень по відношенню до керуючих змінних;
- існування за керуючими змінними перших та других частинних та мішаних частинних похідних від показника ефективності.

Простою ознакою некласичності даних задач математичного програмування є вимога стосовно дискретності керуючих змінних.

Класичні задачі можливо поділити на 2 підкласи:

- 1) задачі пошуку безумовного екстремуму;
- 2) задачі пошуку умовного екстремуму (рис.2.2).





$$\text{б) } W_{\min} = W(x_1), x_{\min} = x_1$$

Рис. 2.2. Графічна ілюстрація класифікації класичних задач математичного програмування:
а) безумовний екстремум; б) умовний екстремум.

Некласичні задачі математичного програмування поділяють на спеціальні та неспеціальні. До основних типів спеціальних задач математичного програмування відносяться:

1) Задача лінійного програмування (ЗЛП).

Загальна постановка ЗЛП має вигляд:

$$W = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{X \in G}, \quad (2.1)$$

де $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, G – область допустимих розв'язків, яка задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, x_j \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

В записаних виразах c_j, a_{ij}, b_i ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – параметри, x_j ($j = \overline{1, n}$) – керуючі змінні.

2) Задача квадратичного програмування (ЗКП).

Загальна постановка ЗКП відрізняється від задачі лінійного програмування формою запису показника ефективності:

$$W = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n d_{kj} x_k x_j \rightarrow \max_{X \in G}, \quad (2.4)$$

де d_{kj} ($k = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$) параметри.

3) Задача сепарабельного програмування (ЗСП).

Загальна постановка ЗСП відрізняється від задач лінійного програмування формою запису показника ефективності:

$$W = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \max_{X \in G}$$

адитивний показник ефективності

або

$$W = \prod_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \max_{X \in G}$$

мультиплікативний показник ефективності

де $f_j(x_j)$ ($j = \overline{1, n}$) – відомі функції.

4) Задача геометричного програмування (ЗГП).

Загальна постановка ЗГП набуває вигляду:

$$W = \sum_{k=1}^L c_k \left(\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{kj}} \right) \rightarrow \max_{X \in G}, \quad (2.5)$$

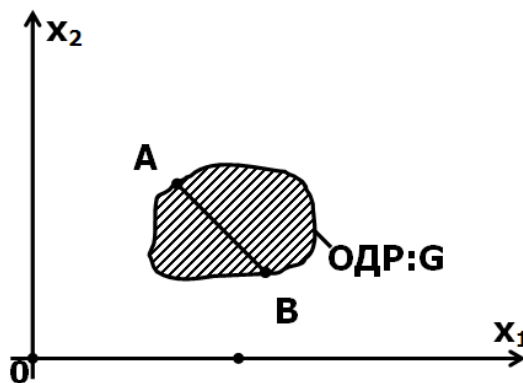
де G – область допустимих розв'язків, що задається нерівностями:

$$\sum_{k=1}^L c_{ik} \left(\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ikj}} \right) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.6)$$

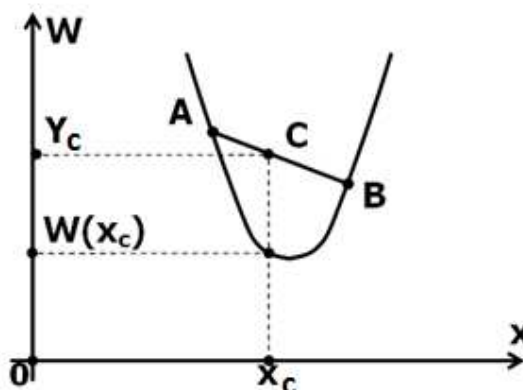
де $c_k, c_{ik}, \alpha_{kj}, \alpha_{ikj}, b_i$ ($k = \overline{1, L}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – параметри.

5) Задача опуклого програмування (ЗОП).

Загальна постановка ЗОП полягає в тому, що показник ефективності і обмеження є опуклими функціями.



а) точки А, В належать границі області допустимих розв'язків (ОДР). Якщо всі точки відрізка АВ належать ОДР при будь-якому розташуванні А, В на границі ОДР, то ОДР – опукла.



б) W – показник ефективності, опуклий (вигнутий) донизу. Показник ефективності вважається опуклим донизу, якщо при будь-якому розташуванні точок A та B ордината точки C буде більша за значення показника ефективності в цій точці: $Y_c > W(x_c)$.

Рис. 2.3. Графічна ілюстрація щодо пояснення змісту терміну «опукла область допустимих рішень» та «опуклий показник ефективності»

6) Задача дискретного програмування (ЗДП), яка виникає у випадку, якщо будь-яку із попередніх задач доповнити умовою, що хоча б одна із компонент $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ може приймати окремі значення, наприклад, цілочисельні.

7) Задача стохастичного програмування (ЗСтП), яка виникає в будь-якому із попередніх випадків, коли всі або деякі, перелічені в пунктах 1, 2, 3, 4, параметри є випадковими величинами.

Всі інші види задач математичного програмування відносяться до неспеціальних, некласичних задач математичного програмування.

2.3. Теорема про достатні умови глобального максимуму

Означення 2.1.

В загальній задачі математичного програмування вектор змінних \hat{X} є *точкою глобального максимуму*, якщо він належить області існування планів задачі G і показник ефективності набуває на ньому значення не менше, ніж в будь-якій допустимій точці:

$$\hat{X} \in G \text{ та } W(\hat{X}) \geq W(X) \quad \forall X \in G.$$

Означення 2.2.

Якщо $W(\hat{X}) > W(X) \quad \forall X \in G$, то *глобальний максимум* називається *строгим* або *сильним*.

Означення 2.3.

Вектор змінних є *точкою локального максимуму*, якщо він належить допустимій множині та на ньому досягається значення показника ефективності більше або рівне значенню показника ефективності в деякому малому околі цього вектора

$$\hat{X} \in G, \quad W(\hat{X}) \geq W(X) \quad \forall X \in G \cap M_\varepsilon(\hat{X}),$$

де $M_\varepsilon(\hat{X})$ – ε -оکیل вектора \hat{X} , який в даному випадку є множиною точок, що задовольняють умові

$$|X - \hat{X}| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \hat{x}_j)^2} \leq \varepsilon.$$

Означення 2.4.

Якщо $W(\hat{X}) > W(X) \quad \forall X \in G \cap M_\varepsilon(\hat{X})$, то *локальний максимум* називається *строгим* або *сильним*.

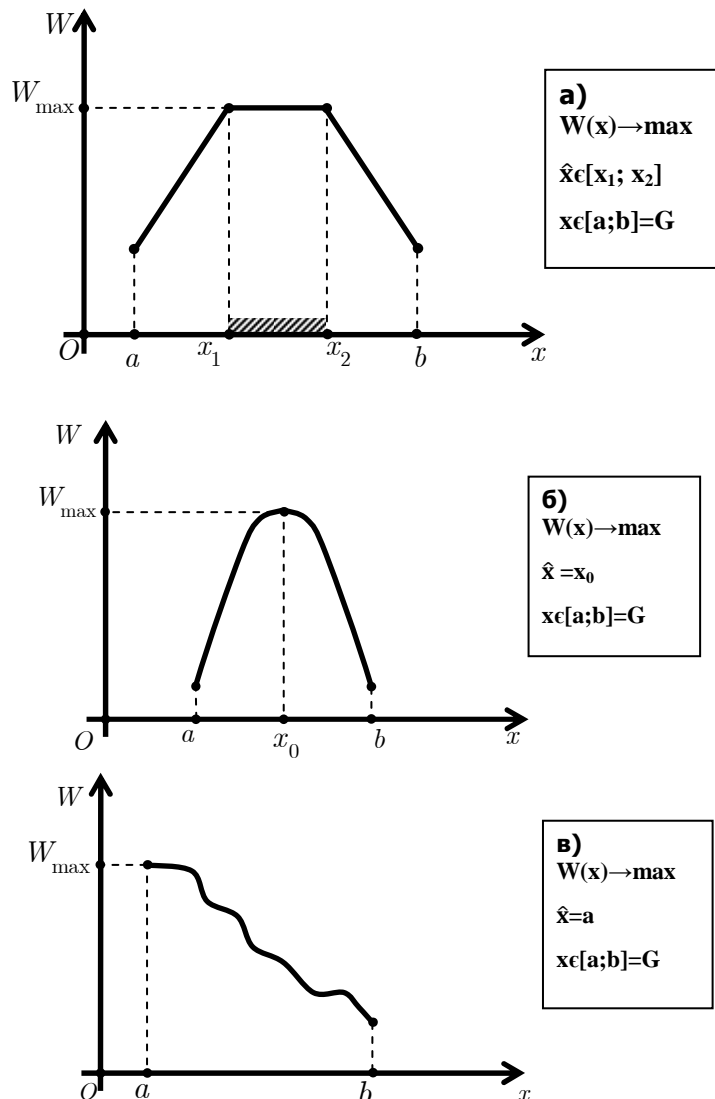
Теорема 2.1.

Припустимо, що допустима множина G обмежена і замкнена (границя входить до складу ОДР G), ще й опукла, а неперервний показник ефективності є опуклим догори на G . Тоді локальний максимум є глобальним. Якщо $W(X)$ строго вигнута догори функція, то розв'язок задачі пошуку максимуму єдиний (існує єдиний глобальний максимум).

Достатні умови існування глобального максимуму формулює теорема Вейрштрасса.

Теорема 2.2.

Припустимо, що допустима множина G – обмежена, замкнена і опукла, тоді неперервний показник ефективності $W(X)$ досягає глобальний максимум у внутрішній або граничній точці множини G .



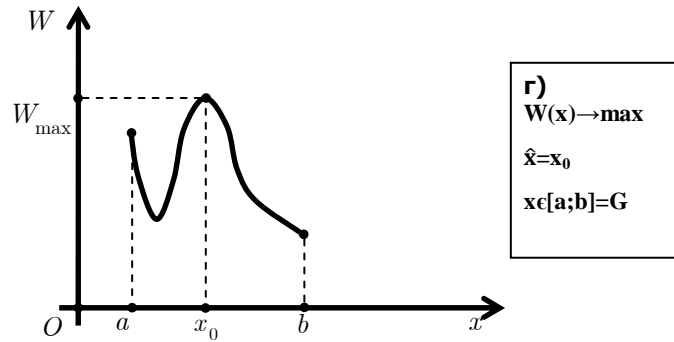


Рис. 2.4. Графічна ілюстрація теоремі про глобальний максимум вигнутої вгору функції (а,б) та теоремі Вейєрштраса (в,г).

Головною специфічною рисою некласичних задач математичного програмування є те, що вони мають яскраво означену прикладу спрямованість. При математичній постановці задач, які спрямовані на розв'язання конкретних практичних завдань, зазвичай виникає велика кількість специфічних обмежень, які класична теорія не враховує.