

## Лекція 1. Загальна методологія математичного програмування та дослідження операцій

### 1.1. Основні поняття та визначення. Ефективність операцій

**Означення 1.1.** *Операція* – будь-яка дія або система дій, що об'єднані єдиним задумом і спрямовані на досягнення визначеної цілі.

**Означення 1.2.** Конкретну реалізацію послідовності дій у просторі і часі називають *сценарієм операції*.

**Означення 1.3.** Під назвою *дослідження операцій в телекомунікаціях* розуміють застосування математичних методів для кількісного обґрунтування рішень стосовно розвитку інформаційно-телекомунікаційних технологій та підвищення ефективності їх використання.

Приклади операцій у телекомунікаційних системах:

- система заходів щодо підвищення надійності телекомунікаційних систем і пристроїв;
- система заходів зниження інформаційних ризиків (пошкодження інформації, знищення інформації, несанкціонований доступ до конфіденційної інформації);
- розміщення базових станцій стільникового зв'язку;
- розміщення замовлень на виготовлення апаратури;
- створення угруповання навігаційних та зв'язних супутників Землі;
- створення системи гарантійного обслуговування телекомунікаційних систем та мереж ;
- оптимізація параметрів та структури безпроводових сенсорних мереж.

**Означення 1.4.** Характеристики дій (фактори операцій), які змінювати в умовах операцій неможливо вважаються *параметрами операції*.

**Означення 1.5.** Характеристики дій, за рахунок зміни яких проявляється позитивний результат називають *змінними* або *керуючими параметрами*.

Таким чином, операціями завжди можливо керувати. Будь-який вибір, в залежності від дослідника керуючих параметрів носить назву розв'язок (рішення, план операції чи стратегія).

Розв'язки можуть бути такими, що задовольняють чи не задовольняють технічним та (або) економічним, та (або) екологічним, та (або) соціальним обмеженням, і відповідно носять назву *допустимі* або *недопустимі*. Зрозуміло, що останні відкидають, а серед перших обирають оптимальні, тобто ті, які у деякому розумінні мають перевагу над іншими.

**Основна задача дослідження операцій** – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень. Під прийняттям рішення в технічних системах розуміють остаточне затвердження усіх дій, що складають операцію на основі запропонованого оптимального розв'язку та із врахуванням додаткової інформації. Існує поняття «особа, що приймає рішення» (ОПР).

ОПР – це фізична особа або колектив фахівців. Для прийняття рішення ОПР використовує спеціальні методи і методики. Методи дослідження операцій складають теоретичну основу процесу підготовки та прийняття рішення. Поряд із основною задачею (обґрунтування оптимальних розв'язків), при дослідженні операцій досліджують додаткові задачі:

- 1) порівняльний аналіз різних варіантів організації операцій;
- 2) оцінка впливу на результат операцій різноманітних змін параметрів операцій;
- 3) дослідження операцій на предмет виявлення критичних елементів (критичних параметрів операцій), тобто таких складових операцій, порушення запланованого функціонування яких, призводить до суттєвого погіршення остаточних результатів операцій.

Допоміжні задачі набувають особливого значення, коли дану операцію необхідно розглядати не ізольованою, а як елемент цілісної системи операцій. Дослідження цілісної системи операцій базується на так званому системному підході, який вимагає комплексного врахування взаємної залежності та обумовленості складових елементів системи операцій. Для отримання розумних(раціональних) рішень необхідно вміло використовувати як прийоми агрегування, тобто укрупнення операцій, так і їх декомпозиції, тобто розбиття на окремі складові.

Припустимо, що нам вдалося виділити окрему операцію. Метою операції є досягнення її найбільшої ефективності. Під ефективністю операції розуміємо ступінь її налаштованості на виконання задачі, що перед нею стоїть. Чим краще організована операція, тим вона ефективніша.

**Означення 1.6.**

*Критерієм оцінки* або *показником ефективності* або *цільовою функцією*  $W$  називається функція фізичної величини чи сукупності фізичних величин, обчислення або вимірювання якої дозволяє кількісно оцінити результат виконання операції.

Порівнюючи показники ефективності для різного складу дій потрібно обрати найкращий спосіб для організації операції. Показник ефективності може бути задано аналітично, алгоритмічно або його можливо вимірювати. Конкретний вигляд показника ефективності, яким слід користуватися при чисельній оцінці ефективності, залежить від спеціальних властивостей конкретної операції, її цільової спрямованості, а також від задачі дослідження. Ця задача може бути поставлена в різних формах: детермінованій або із урахуванням елементів невизначеності.

## 1.2. Математичні моделі операцій

### 1.2.1. Загальні відомості про математичні моделі операцій

Загальних способів побудови математичних моделей операцій не існує. В кожному випадку модель будують виходячи із цільової спрямованості операцій і задачі наукового дослідження з урахуванням необхідної точності рішення, а також точністю із якою відомі вихідні дані. При побудові математичної моделі явище (в даному випадку операція) деяким чином спрощується, схематизується. З безлічі факторів, що впливають на явище виділяють порівняно невелику кількість найважливіших, а потім отримана схема опису явища повинна бути представлена в найбільш відповідних для неї математичних термінах (як кажуть, із використанням адекватного математичного апарату). В результаті встановлюються кількісні зв'язки між умовами операції, її параметрами та результатом операції, який оцінюється показником ефективності або сукупністю показників, якщо їх в даній задачі декілька.

Побудова математичної моделі – це мистецтво, яке вдосконалюється із досвідом. В складних випадках, коли немає єдиного рішення щодо математичної моделі операції, використовується прийом, який отримав назву конкуренція моделей. Тобто, одне і те саме явище досліджується із використанням декількох математичних моделей. Після співставлення результатів теоретичних досліджень з експериментальними даними обирається найкраща за критерієм мінімального відхилення від експериментальних даних модель.

Для складних задач дослідження операцій характерною особливістю є корекція математичної моделі після кожного циклу дослідження. Побудова математичної моделі – найбільш важлива і відповідальна частина дослідження, яка вимагає як глибоких математичних знань, так і знань предметної області, тобто суті явища, яке моделюється.

**Математичні моделі**, які використовуються в задачах дослідження операцій можливо поділити на два класи:

- 1) аналітичні;
- 2) алгоритмічні.

Перші встановлюють формульні (аналітичні) залежності між показником ефективності, змінними і параметрами задачі. Зазвичай ці залежності записують у вигляді рівнянь або нерівностей: алгебраїчних, звичайних диференціальних або із частковими похідними. За допомогою аналітичних моделей вдається із задовільною точністю описати лише прості операції, де кількість елементів, що взаємодіють порівняно невелика.

В операціях значного масштабу, де взаємодіють багато елементів, що перебувають під дією випадкових факторів, доцільно застосовувати алгоритмічні математичні моделі, які дозволяють виконувати імітаційне моделювання операцій. Суть цього моделювання полягає в тому, що процес розвитку операції імітується на комп'ютері із усіма випадковостями, які цю операцію супроводжують.

Найкращі результати дослідження операцій можливо отримати при сумісному застосуванні аналітичних та імітаційних моделей: проста аналітична мо-

дель дозволяє розібратись у основних закономірностях явища, з'ясувати напрямки його розвитку, а подальшого уточнення кількісних значень показника ефективності операції можливо досягти імітаційним моделюванням.

### 1.2.2. Детерміновані аналітичні моделі операцій

Розглянемо задачу дослідження операції в загальній постановці, тобто без врахування специфічних властивостей конкретної операції та її цілей. Припустимо, що необхідно виконати деяку операцію, тобто керований захід, на остаточний результат якого можливо вплинути обираючи змінні характеристики цієї операції  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Ефективність операції оцінюється за допомогою чисельного показника  $W$ . Оптимальним розв'язком задачі вважаються ті значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при яких  $W$  досягає глобального максимуму. В літературі позначають:

$$M = \sup_{X \in G} W,$$

де  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ ,  $G$  – область допустимих розв'язків (ОДР).

В тому випадку коли необхідно досягти глобального мінімуму:

$$m = \inf_{X \in G} W.$$

Цю задачу можливо переформулювати в задачу пошуку глобального максимуму, розглядаючи замість показника ефективності  $W$  показник ефективності  $-W$ .

Якщо математична модель побудована, то це означає:

- 1) відомі фактори операції  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , на які дослідники впливати не можуть;
- 2) визначено фізичний зміст і математична формалізація факторів операції  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , на які дослідники можуть впливати;
- 3) визначено спосіб отримання чисельного значення показника ефективності операції  $W$ , яке буде залежати від  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  та  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;
- 4) з'ясовано ОДР  $G$ , тобто умови обмежень, що діють в даній операції

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \left\{ \begin{array}{l} \leq 0, \\ = 0, \\ \geq 0 \end{array} \right\} \quad j = \overline{1, q}.$$

Загальна детермінована поставка задачі дослідження операції формулюється наступним чином: при заданих умовах (4) знайти такі розв'язки (2), при яких показник ефективності (3) досягає глобального максимуму.

Специфічним для детермінованої задачі дослідження операції, порівняно із задачами пошуку екстремумів гладкої функції (допускається існування похідних та частинних мішаних похідних високих порядків), є наявність обмежень-нерівностей та недиференційовність, в деяких випадках, показника ефективності за елементами розв'язку  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Загальних математичних методів знаходження екстремумів функцій при наявності довільних обмежень не існує, але коли показник ефективності та об-

меження мають специфічні властивості, існують спеціальні методи розв'язання таких задач. Якщо показник ефективності  $W$  залежить від  $x_1, x_2, \dots, x_n$  лінійно і обмеження (4) мають вид лінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей, то глобальний максимум  $W$  знаходимо із використанням спеціального математичного апарату, що носить назву *лінійне програмування*. Якщо обмеження (4) та показник ефективності  $W$  мають інші властивості (наприклад, опуклі, сепарабельні, квадратичні), застосовується математичний апарат *опуклого або сепарабельного, або квадратичного програмування*. Якщо операція, за фізичним змістом операції, розділяється на декілька кроків чи станів, а показник ефективності  $W$  дорівнює сумі показників  $W_k$ , досягнутих на окремих етапах виконання операції, то для пошуку оптимального рішення можливо застосовувати метод *динамічного програмування*.

- Зауваження 1.1.**
1. Для розв'язання задачі пошуку екстремуму показника ефективності  $W$ , зазвичай, використовують чисельні методи, які попередньо перевіряють (тестують) на розв'язанні задач пошуку екстремумів функцій із спеціальними властивостями, наприклад, функції Розенброка (рис.1.1). Ці функції дозволяють з'ясувати досконалість чисельних методів з точки зору уникнення зациклювань та спроможності обходити так звані «складки» та точки стаціонарності.
  2. Показник ефективності може мати на ОДР  $G$  декілька локальних екстремумів (рис.1.2).

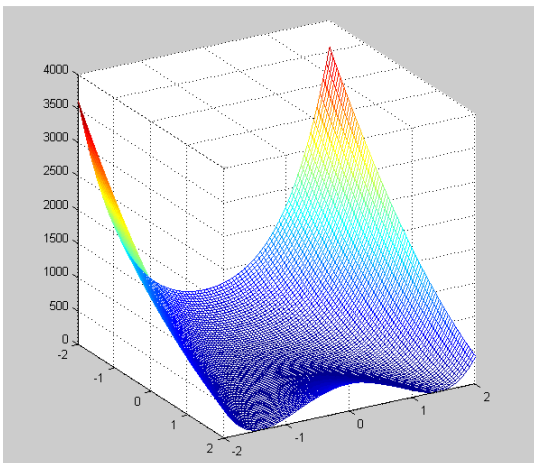


Рис.1.1. Функція Розенброка

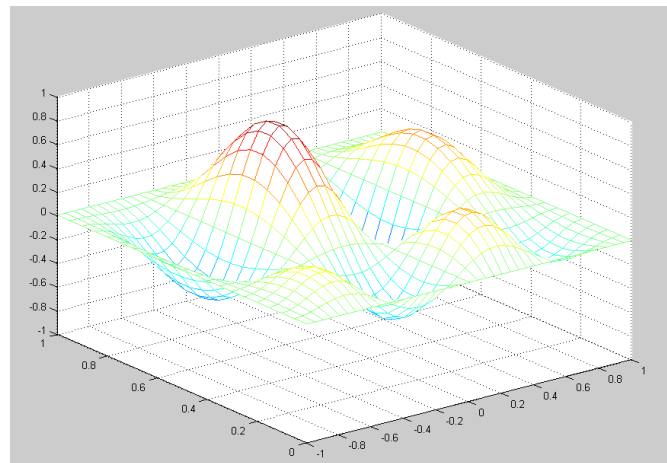


Рис. 1.2. Приклад багатоекстремального показника ефективності

### 1.2.3. Математичні моделі операцій із врахуванням невизначеності

Типовим для практики є випадок, коли не всі параметри операції, що не може змінювати дослідник, відомі, тобто є такі з них, які включають в себе елемент невизначеності. Наприклад, невизначеність параметрів каналів зв'язку може бути викликана змінами стану атмосфери (зміни погоди або сонячної активності) або дією штучних електромагнітних завад в телекомунікаційних системах спеціального призначення.

В умовах невизначеності до складу математичної моделі операції входять 3-и категорії факторів(параметрів) операції:

- 1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , які відомі заздалегідь і не можуть бути змінені;
- 2)  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ , які є невідомими, і впливати на них дослідник не може;
- 3)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які необхідно обрати для надання операції бажаних властивостей.

Від цих факторів залежить показник ефективності  $W$  та (або) функції, що описують ОДР  $G$ .

Якби фактори  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  були відомі, то можливо було б обрати такі фактори  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , при яких  $W$  досягав би глобального максимуму. Але яких саме значень  $y_1, y_2, \dots, y_k$  набудуть  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  при реалізації операції невідомо і заздалегідь передбачити значення  $W$  теж буде неможливо.

**Постановка задачі дослідження операції в умовах невизначеності набуває вигляду:**

при заданих обмеженнях, фіксованих параметрах  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , із урахуванням невідомих факторів  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  знайти такі елементи розв'язку  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які «по можливості» дозволяють показнику ефективності  $W$  досягти, як кажуть, «розумного» (раціонального) або вигідного значення.

Методи розв'язання задач дослідження операцій в такій постановці суттєво залежать від:

- природи факторів  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ ;
- об'єму відомостей про математичну модель факторів  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ .

Невизначеність  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  можливо класифікувати наступним чином:

- 1)  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  – випадкові величини або випадкові функції із відомими статистичними даними, які дозволяють ідентифікувати їх сумісну функцію розподілу або сумісну щільність ймовірності;
- 2)  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  – невідомі фактори, які неможливо вивчати за допомогою статистичних методів, тому що відсутні відповідні статистичні дані, або явища, із якими пов'язані  $Y_1, \dots, Y_k$  взагалі не мають властивості статистичної стійкості;
- 3)  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  – невідомі фактори, невизначеність яких пов'язана із діями «супротивника». Така ситуація є характерною для конкурентної боротьби на ринку телекомунікаційних послуг та в задачах захисту інформації.

**В першому випадку** математична модель задачі модифікується за рахунок зміни вигляду показника ефективності за допомогою одного з двох прийомів. Перший прийом: штучне зведення задачі з невизначеністю до детермінованої задачі дослідження операції шляхом заміни  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ , що входять до складу

показника ефективності, на їх відповідні математичні сподівання  $M[Y_1], \dots, M[Y_k]$ . Другий прийом: «оптимізація в середньому», коли в якості показника ефективності обирається математичне сподівання:

$$\bar{W} = M[W] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n) f(y_1, \dots, y_k) dy_1 \cdot \dots \cdot dy_k. \quad (1.1)$$

**В другому випадку**, базуючись на знанні діапазону значень, обчислюються так звані локально-оптимальні рішення: оптимальне рішення для фіксованих значень  $y_1, \dots, y_k$  із відомого діапазону  $y_1 \in [y_{min}; y_{max}], \dots, y_k \in [y_{min}; y_{max}]$  відповідно, які в подальшому аналізують і знаходять деякі значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які є компромісним розв'язком, що не є строго оптимальним ні для однієї з досліджуваних вище умов локальної оптимальності, але є прийнятними для розв'язання задачі в цілому. Таких прийнятних розумних розв'язків може бути декілька.

**В третьому випадку** для пошуку розв'язку використовується так звана теорія ігор – математична теорія конфліктних ситуацій. Вважаючи, що протидіюча нам у конфлікті сторона завжди прагне максимізувати наші збитки, то зрозумілою з нашого боку є стратегія (тобто таке рішення), яка мінімізує максимум нанесених збитків. Кажуть, що має місце так звана мінімаксна стратегія.

#### 1.2.4. Математичні моделі операцій із декількома показниками ефективності

В практиці телекомунікаційних систем достатньо часто зустрічаються випадки, коли ефективність операції оцінюють не по одному, а по декількох показниках ефективності  $W_1, W_2, \dots, W_l$ , приміром, надійнісних, вартісних (економічних), технічних. Тобто, математична модель операції в задачі із декількома показниками ефективності, як в детермінованому випадку, так і у випадку з невизначеністю, відрізняється від розглянутих тим, що замість скалярного показника ефективності  $W(x_1, \dots, x_n)$ , або  $W(Y_1, \dots, Y_k, x_1, \dots, x_n)$  використовується векторний показник ефективності:

$$\Omega = [W_1(x_1, \dots, x_n), \dots, W_l(x_1, \dots, x_n)]^T$$

або

$$\Omega = [W_1(Y_1, \dots, Y_k, x_1, \dots, x_n), \dots, W_l(Y_1, \dots, Y_k, x_1, \dots, x_n)]^T.$$

Бажаною є постановка задачі дослідження операцій, що вимагає пошуку такого розв'язку  $x_1, \dots, x_n$ , при якому усі складові векторного показника ефективності досягають свого екстремального значення. В загальному випадку такого розв'язку не існує, але використовуючи методи розв'язання багатокритеріальних задач, або, як ще кажуть, методи оптимізації за векторним критерієм, мож-

ливо побудувати процедури вилучення неконкурентноздатних варіантів рішення і тим самим звузити множину розв'язків до меж, в яких виконується подальший вибір раціонального рішення.

### 1.3. Склад методики дослідження операцій

**Складом методики дослідження операцій є наступні заходи:**

- 1) Визначення цілей.
- 2) Складання плану розробки проекту, операції.
- 3) Формулювання проблем.
- 4) Побудова моделі.
- 5) Розробка обчислювального методу.
- 6) Розробка технічного завдання на програмування, програмування та відлагодження програми.
- 7) Збір даних.
- 8) Перевірка моделі.
- 9) Реалізація результатів.

Розглянемо їх детальніше.

**1** Першочергова ціль будь-якого дослідження операцій полягає в тому, щоб з'ясувати, що очікує отримати керівник операції в результаті її проведення, тобто, які передбачувані результати проведення операції можна очікувати.

Цілі дослідження треба формулювати, виходячи з суті рішення або рішення, на яке орієнтована дана робота. Цілі не треба формулювати ані занадто вузько, ані занадто широко. Неправильне і неточне формулювання цілей може призвести дослідників до розв'язання невірної поставленої задачі.

**2** Другий етап дослідження полягає у складанні плану виконання проекту операції, тобто установленню необхідних термінів завершення певних видів робіт. Це – одна з форм контролю за ходом розробки проекту. Як документ, план розробки проекту операції являє собою календарний графік виконання його етапів. Етапи можуть деталізуватися до рівня окремих завдань. Наприклад, етап розробки обчислювального методу може мати такі завдання: розробку методу розв'язання для кожної підмоделі задачі; опис і документальне оформлення методів розв'язання; перевірку запропонованих методів на вибраних задачах невеликої розмірності; внесення уточнень та змін щодо методів розв'язання на підставі результатів пробних розрахунків тощо. При складанні плану треба також приділяти увагу розподілу робіт між окремими виконавцями.

**3** Формулювання проблеми – наступний етап дослідження. Він містить не тільки обговорення з керівником операції цілей дослідження, а й збір даних, які надають можливість уявити суть проблеми, що мало місце у минулому, чого треба очікувати в майбутньому, який характер співвідношень між змінними досліджуваної задачі. На основі цих результатів формулюється загальна схема побудови моделі і визначаються напрям усієї наступної роботи.

Одним із питань, які пов'язані з формулюванням проблеми, є визначення того, чи можна усю проблему представити у вигляді окремих підпроблем, щоб

паралельно або послідовно дослідити їх незалежно одна від одної (декомпозиція). Друге питання пов'язане з визначенням ступені деталізації моделі, що розробляється. Останнє залежить від обсягів виділених коштів, календарного плану розробки проекту, цілі дослідження.

Наступна фаза стосується галузі застосування та розмірності моделі, що розробляється, визначенню керованих і некерованих змінних, технологічних параметрів операції, показників ефективності, які нададуть змогу оцінити конкретні розв'язки розглянутої проблеми.

**4** Четвертий етап дослідження пов'язаний із побудовою моделі. Вона відображає взаємозв'язок між керованими змінними, некерованими змінними, технологічними параметрами і показниками ефективності. Правильно побудована модель – основна умова успішної розробки проекту операції.

Пристаючи до розробки моделі, насамперед, треба з'ясувати питання про можливість використання тих чи інших показників і співвідношень у рамках моделі. Існує декілька різних типів співвідношень, які формують модель: співвідношення, які виходять із визначень, емпіричні співвідношення, нормативні співвідношення. Крім того, треба зібрати та ретельно проаналізувати великий об'єм даних.

На кінцевому етапі побудови моделі досліднику треба дати точне аналітичне або алгоритмічне формулювання досліджуваної проблеми.

**5** Разом з роботою з побудови моделі необхідно вибрати або розробити чисельний метод розв'язання. Для цього треба з'ясувати такі моменти:

- чи треба використовувати імітаційне моделювання або будь-який із методів оптимізації;
- чи повинна модель враховувати випадковий характер деяких змінних або ж достатньо використовувати детермінований підхід;
- чи треба враховувати нелінійність певних співвідношень, чи достатньо обмежитися їх лінійною апроксимацією;
- чи можна використовувати існуючі методи розв'язання, або треба розробити новий метод.

Отже, необхідно з'ясувати, які треба зробити припущення та який метод розробити, щоб застосування моделі було практично виправданим у відношенні до використовуваних обчислювальних процедур. Цей етап також містить перевірку запропонованого чисельного методу із використанням модельних (тобто таких, точний розв'язок яких відомий) тестових задач, перевіряється можливість використання і коректність розроблених методів розв'язання.

**6** Створення програм для ЕОМ у багатьох випадках є складовою частиною дослідження. Розробка технічного завдання на програмування повинна виконуватися ретельно, що дасть змогу забезпечити більш якісне документальне оформлення програм, результатом чого дослідження стає значною мірою орієнтованим на користувача, на задоволення його потреб. Треба звернути увагу на одну з робіт, які проводяться на цьому етапі, складання вхідних форм та вихід-

них (документів), їх обговорення та узгодження з керівництвом та виконуючим персоналом.

Вхідні форми – бази даних, які надають можливість забезпечити користувача інформацією, що швидко підготовлюється і легко оновлюється. Наглядні вихідні форми повинні дати користувачу зрозумілу, добре підібрану й зручно розташовану інформацію.

Що стосується саме програмування і відлагодження, то в багатьох випадках проект з дослідження операцій не потребує розробки машинних програм, а за потреби завжди можна використати існуючі програми.

**7** На цьому етапі здійснюється збір та аналіз даних, які є необхідними для перевірки правильності моделі та практичного застосування результатів дослідження операцій, тоді як на попередніх етапах збір даних переслідував цілі, що були пов'язані, перш за все, з формулюванням проблеми та побудовою моделі. Тому проблема відсутності даних не є перешкодою до виконання продуктивних операційних досліджень, оскільки математична модель є засобом, який дозволяє обійти труднощі отримання відповідних оцінок шляхом зведення їх до більш простих вимірювань.

Використання моделей, які розробляються при дослідженні операцій, допомагає в процесі прийняття рішень. Розв'язок проблеми зводиться до найпростіших вимірювань, встановленню вихідних змінних і показників ефективності, які є функціями цих змінних. У цьому випадку може бути потрібно більше даних, але отримати їх значно простіше, а вимоги до їх точності будуть менш жорсткими.

**8** Етап перевірки моделі містить дві фази: визначення способів перевірки і здійснення самої перевірки. На першій – вибираються аналітичні й експериментальні методи перевірки несуперечності, чутливості, реалістичності та роботоздатності моделі. Для здійснення перевірки моделі будуть необхідні дані, які отримані на попередньому стані. Результати цієї роботи можуть призвести до необхідності перебудови моделі та, відповідно, до складання нових програм.

**9** Отримані результати дослідження операцій треба представити рядом робочих процедур, які можна легко зрозуміти і застосувати діючій стороні. Це найважливіший етап, яким завершується операційне дослідження, його можна розглядати як самостійну задачу.

#### 1.4. Типові класи задач дослідження операцій

За своєю змістовною постановкою множину задач дослідження операцій можна розбити на ряд класів, до яких зводиться більшість з них.

##### **Основні класи задач дослідження операцій:**

- управління запасами;
- розподілу ресурсів;
- ремонту та заміни обладнання;
- масового обслуговування;
- упорядкування та координації;

- вибору маршруту;
- пошуку;
- змагальні;
- комбіновані.

У дійсності задачі відповідних класів «виникають» одна з одної відповідно до того, як поширюється уявлення про досліджувану операцію.

Надамо стисло характеристику перелічених класів задач.

**Задачі управління запасами.** Можна виділити, принаймні, чотири основні причини, що призводять до необхідності створення запасів:

- необхідність гарантувати безперебійність виробничого процесу;
- періодичність виробництва окремих матеріальних ресурсів у постачальників;
- особливості транспортування від постачальників до споживачів (невідповідність вантажопідйомності транспортних засобів і розмірів споживання);
- незбіжність ритму виробництва та постачання виробничих ресурсів із ритмом їх споживання.

Задача управління запасами в загальному випадку формулюється так. Існують певні запаси, витрати на зберігання яких є функцією їх величини. Відомі також витрати на доставку ресурсів. Треба визначити оптимальний розмір поставки, частоту та терміни надходження ресурсів, щоб сумарні витрати були мінімальними. Критерієм оптимальності є сума витрат на зберігання і поставку ресурсів.

Задачі управління запасами можна класифікувати:

- за кількістю періодів управління (поповнення запасів) – на однопіріодні та багатопіріодні;
- за характером поповнення запасів – із неперервною системою поповнення запасів (миттєве) і періодичне (із затримкою);
- за урахуванням попиту – на детерміновані і ймовірнісні (статистичні);
- за кількістю типів ресурсів – на однопіріодкові і багатопіріодкові;
- за видом цільової функції – на задачі з пропорційними та непропорційними витратами.

**Задачі розподілу ресурсів** пов'язані з розподілом обмежених ресурсів по роботах, які треба виконати. При цьому можуть бути задані як роботи, так і ресурси, або тільки роботи. Перекидання, передавання ресурсів з однієї роботи на іншу, якщо не всі роботи можна виконати найефективніше через відсутність ресурсів, призводить до зменшення спільної ефективності усіх робіт, взятих разом. Тому задачі розподілу ресурсів полягають у відшуканні такого розподілу ресурсів, при якому максимізується спільний прибуток або результат чи мінімізуються витрати. Задачі розподілу ресурсів дуже різноманітні за змістом і багато з них має спеціальну назву: транспортна задача; задача про призначення; задача про суміші; задача вибору оптимальних технологій тощо.

**Задачі ремонту та заміни обладнання** виникають у тих випадках, коли технічні характеристики працюючого обладнання погіршуються за рахунок старіння, спрацювання та інших причин. Це призводить до необхідності заміни

обладнання з метою зменшення сумарних витрат на експлуатацію або попередження нового виходу з ладу. В деяких випадках виникає потреба раціональної організації профілактичного обслуговування, тобто попереджувально-відновлювального ремонту.

**Задачі цього класу розподіляють таким чином:**

1. За характером заміни обладнання:
  - задача заміни обладнання довгострокового використання;
  - задача заміни обладнання з метою попередження відмов;
  - задачі вибору оптимального плану попереджувального ремонту та профілактичного обслуговування.
2. За характером урахування витрат на обладнання – на дискретні та неперервні.
3. За виходом із ладу обладнання – на детерміновані та випадкові.
4. За стратегією заміни обладнання – на планові та змішані.
5. За часом урахування витрат на обладнання – з приведенням та без приведення витрат більш пізніх років до розрахункового.

**Задачі масового обслуговування** умовно поділяють на задачі аналізу та задачі синтезу – оптимізації систем масового обслуговування. Задачі аналізу припускають оцінку ефективності функціонування систем при незмінних, наперед відомих вихідних характеристиках системи масового обслуговування: структурі системи; дисципліні обслуговування; потоках вимог і законах розподілу часу їх обслуговування. Задачі синтезу спрямовані на пошук оптимальних параметрів системи масового обслуговування (вибір числа каналів, їх послідовності, включення до роботи, пропускну здатності) і характеристик функціонування (формування вхідного потоку вимог, вибір дисципліни обслуговування тощо).

**Задачі упорядкування та координації.** Задачі упорядкування пов'язані з визначенням оптимальної послідовності обробки виробів, масивів інформації тощо. Задачі координації відносяться до комплексів операцій, та складаються з певної сукупності окремих операцій, які повинні виконуватися за часом у заданій послідовності. Це – задачі сіткового планування й управління. В цьому класі задач розглядаються співвідношення між строками закінчення комплексу операцій та моментами початку усіх операцій комплексу.

**Задачі вибору маршруту** зустрічаються при дослідженні різноманітних процесів на транспорті, в системах зв'язку. Типова задача полягає у відшуканні найкращого маршруту, який пов'язує декілька пунктів. На допустимі маршрути може накладатися ряд обмежень, коли забороняється повернення до пройденого пункту або у кожному пункті можна побути тільки одного разу.

Серед цих задач найбільш відомими є: задача вибору найкоротшого шляху між довільними пунктами; задача комівояжера; задача про максимальний потік.

**Задачі пошуку** складаються у відшуканні найкращого засобу отримання інформації, яка однозначно визначала б розв'язок. Критерієм у такій задачі є мінімум витрат двох видів: вартості отримання інформації й ціни помилки. У першому випадку йдеться про вартість вибірки, тобто вартості вибору спостережень, у другому – про помилки двох видів: помилки вибірки (виявлення того,

що насправді є відсутнім) і помилки спостереження (пропускання того, що насправді має місце). Якщо на проведення пошуку виділені фіксовані ресурси, то чим більше буде розмір вибірки, тим менше обсяг ресурсів на кожне спостереження. Таким чином, при бажанні зменшити помилки вибірки, як правило, зростає помилка спостереження і навпаки.

В обмеженій задачі пошуку обсяг ресурсів, які виділені на пошук, є заданим, і задача полягає у розробці плану пошуку, який мінімізує ціну помилки. У загальній задачі кількість ресурсів можна змінювати таким чином, що її метою є мінімізація сумарних витрат ресурсів і ціни помилки.

**Змагальні задачі** – клас задач дослідження операцій, що виникають під час прийняття рішень в умовах конфліктів, незбігу інтересів осіб. Особливе місце в дослідженні проблем конфлікту займає вибір і порівняльний аналіз можливих (допустимих) способів поведінки сторін, що дає основу для прийняття кожною стороною розумних рішень відносно своїх дій. Особи, які приймають рішення, повинні врахувати не тільки свої цілі, але й цілі, які переслідують інші учасники конфлікту. Відповідну інформацію вдається отримати не завжди, що складає додаткові труднощі як для дослідників, так і осіб, які приймають остаточне рішення.

**Комбіновані задачі** містять декілька типових задач одночасно.